

PHYSIKALISCHE MODELLIERUNG DES KLAVIERKLANGES

DIPLOMARBEIT

durchgeführt von

Klaus Haindl

am Institut für Elektronische Musik
an der Hochschule für Musik und darstellende Kunst in Graz
Vorstand: o.HProf. Mag. Gerd Kühr

eingereicht am

Institut für Nachrichtentechnik und Wellenausbreitung
der Technischen Universität Graz
Vorstand: o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. DDr. Willibald Riedler

Betreuer: Dipl.-Ing. Mag. Dr. Robert Höldrich

Graz, September 1997

Für meine Eltern
und Hermi

Danksagung

Meinem Betreuer Herrn Dipl.-Ing. Mag. Dr. Robert Höldrich möchte ich für seine umfangreiche und engagierte Unterstützung besonderen Dank aussprechen. Ohne seine organisatorische Mithilfe wäre diese Arbeit nicht so reibungsfrei möglich gewesen.

Weiters möchte Herrn Dipl.-Ing. Martin Pflüger, Herrn Thomas Musil sowie allen Mitarbeitern des Institutes für Elektronische Musik, die mir bereitwillig bei verschiedenen Problemen geholfen haben, danken.

Meinen Eltern danke ich innigst für das große Verständnis und die stete Unterstützung, die sie mir während meiner gesamten Ausbildung zuteil werden ließen.

Ein außergewöhnlicher Dank gebührt meiner Freundin Hermi, die mir nicht nur seelischen Beistand bot, sondern durch ihre sprachliche Qualifikation wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beitrug.

Inhaltsverzeichnis

1 Das Klavier	8
1.1 Einleitung.....	8
1.2 Historischer Überblick.....	8
1.3 Aufbau eines Klaviers.....	9
2 Genaue Beschreibung der Funktionseinheiten	12
2.1 Saiten	12
2.1.1 Allgemeines über Chordophone.....	12
2.1.2 Mathematische Beschreibung einer schwingenden Saite	12
2.1.2.1 Physikalische Größen von Saiten	12
2.1.2.2 Herleitung der Differentialgleichung	13
2.1.2.3 Lösung der Gleichung durch Separationsansatz	15
2.1.2.4 D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung.....	17
2.1.2.5 Verlustbehaftete Saitenschwingung	18
2.1.2.6 Differentialgleichung für eine biegesteife Saite	19
2.1.2.7 DGL für eine biegesteife und verlustbehaftete Saite.....	20
2.1.3 Die Besaitung des Klaviers	20
2.1.4 Inharmonizität bei einem realen Instrument	21
2.1.4.1 Ergänzende Formeln zur Inharmonizität	23
2.1.5 Longitudinale Saitenmoden.....	26
2.1.6 Klangspektrum der angeregten Saite.....	28
2.2 Der Hammer.....	29
2.2.1 Der Hammer als dynamisches System	30
2.2.2 Nichtlinearität des Hammerfilzes.....	31
2.2.3 Hystereseeigenschaft des Filzes.....	34
2.2.3.1 Mathematische Beschreibung der Hysterese.....	35
2.3 Interaktion zwischen Hammer und Saite	39
2.3.1 Analytische Lösung für sehr leichte, harte, punktförmige Hämmer.....	40
2.3.2 Allgemeine Lösung für einen harten, schmalen Hammer	41
2.3.3 Allgemeine Lösung für einen weichen, schmalen Hammer	44
2.3.4 Numerische Lösung der Interaktion	47

2.3.5	Alternative Möglichkeiten zur Beschreibung der Interaktion.....	49
2.3.5.1	Modell "Pfeil und Bogen".....	49
2.3.5.1	Beschreibung der Interaktion mit elektromechanischen Analogien	
	50	
2.3.6	Der Anschlag des Pianisten	52
2.4	Resonanzboden Steg und Korpus.....	53
2.4.1	Einleitung	53
2.4.2	Aufbau des Resonanzbodens	53
2.4.3	Der Steg.....	54
2.4.4	Schwingungsverhalten des Resonanzbodens.....	54
2.4.5	Die Impedanz des Steges	56
2.5	Koppelung der Saiten an den Steg und untereinander	58
2.5.1	Ausschwingverhalten des Klavierklanges	58
2.5.1.1	Unterschiedliche Ausschwingraten des Klavierklanges	58
3	Die Modellierung des Computerinstrumentes	63
3.1	Grundlagen physikalischer Modelle.....	63
3.1.1	Strukturierung eines Modells.....	63
3.1.1.1	Modellierung der Anregung.....	64
3.1.1.2	Modellierung des Resonators.....	65
3.1.1.3	Die Verbindung der Blöcke.....	67
3.2	Die Modellierung des Klaviers	68
3.2.1	Das Modell der Saite	68
3.2.1.1	Herleitung des Wellenleitermodells	68
3.2.1.2	Berücksichtigung von Verlusten	71
3.2.1.2.1	Die Charakteristik des Schleifenfilters	72
3.2.1.3	Die Modellierung der Inharmonizität.....	72
3.2.1.3.1	Entwurf des Inharmonizitätsfilters	75
3.2.1.4	Erzielung einer exakten Tonhöhe.....	80
3.2.2	Modellierung der Interaktion zwischen Hammer und Saite	82
3.2.2.1	Lineares Modell der Interaktion	82
3.2.3	Koppelung der Saiten.....	86
3.2.4	Impulsantwort des Resonanzbodens	88
3.2.5	Die Pedale.....	89
3.3	Simulationen und Ergebnisse.....	89

3.3.1	Beschreibung der verwendeten Modelle und Funktionen	89
3.3.1.1	Interaktion	89
3.3.1.2	Saitensimulation	90
3.3.1.3	Die Filter im Wellenleitermodell.....	90
4	Zusammenfassung und Ausblick	91
	Literaturverzeichnis.....	92
	Anhang A.....	95
	Inhalt der Demonstrations-CD	
	Anhang B.....	97
	Grafische Dokumentation verschiedener Simulationen	

Zusammenfassung

Inhalt dieser Diplomarbeit ist die Simulation eines Klavierklanges nach dem Prinzip des physikalischen Modellierens.

Der erste Teil enthält eine Beschreibung der akustischen Eigenschaften des Klaviers sowie eine genaue mathematische Darstellung der physikalischen Zusammenhänge. Für viele Teile des Klaviers sind Modelle erarbeitet worden, welche zur Untersuchung ihres Verhaltens und als Vorbereitung für die Implementation des vollständigen Instrumentes dienen.

Nach einer Zusammenfassung der verschiedenen Methoden des physikalischen Modellierens folgt ein Entwurf digitaler Modelle in Hinblick auf die Realisierbarkeit mit signalverarbeitenden Systemen. Die Simulation eines aufwendigen physikalischen Modells des Klaviers ist mit der MatLab-Toolbox Simulink realisiert worden. Diese Software hat sich aufgrund ihrer umfangreichen Bibliothek an signalverarbeitenden Werkzeugen als sehr effizient erwiesen. Einfachere Modelle sind als Echtzeitanwendung auf einem NeXT-Computer implementiert.

Abstract

The subject of this diploma thesis "PHYSICAL MODELING OF THE SOUND OF A GRAND PIANO" is the simulation of the sound of a grand piano by means of physical modeling.

The first part contains a description of the acoustics of the piano and a detailed mathematical representation of the physical properties. Various parts of the piano are modeled separately with the purpose of understanding how they work. They are also prototypes for the implementation of the complete instrument.

An overview about different types of physical models is given. Examples for the piano are proposed with the aim to work with common signal processing tools.

The complex models are simulated with the MatLab-Toolbox Simulink. This graphic oriented software proved to be very efficient because of its signal processing functions. Less complicated models are implemented to work in real-time on a NeXT-Computer.

1 Das Klavier

1.1 Einleitung

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit dem Klavier geht auf Hermann von Helmholtz zurück, welcher sich neben einer Vielzahl von anderen Wissensgebieten auch mit dem Wesen von Musikinstrumenten und der Empfindung von Klängen durch das menschliche Gehör beschäftigte. In Anbetracht der um die Jahrhundertwende sehr eingeschränkten und aus heutiger Sicht primitiv anmutenden Meßmethoden lieferte er einen beträchtlichen Beitrag zum Verständnis des Klanges vieler Instrumente. Er verfaßte erste theoretische Beschreibungen der Interaktion zwischen Hammer und Saite eines Klaviers. Ein Vorgang, welcher bis heute nicht vollständig geklärt ist.

Die Verfügbarkeit von besseren Meßmöglichkeiten in den 40er- und 50er-Jahren entfachte neues Interesse an der Erforschung des Wesens des Klaviers. Ein neuer bis in die Gegenwart andauernder Motivationsschub ist etwa Mitte der 80er-Jahre ausgelöst worden. Der Grund dafür war einerseits die sehr rasch zunehmende Rechenleistung, andererseits aber vielleicht die Erkenntnis, daß auch mit modernen Methoden der Klangsynthese kein natürlicher Klavierklang, welcher hohen Ansprüchen genügt, erzeugt werden konnte. Das Klavier ist wahrscheinlich das am besten untersuchte Instrument der heutigen Zeit [1].

1.2 Historischer Überblick

Im Gegensatz zu vielen anderen Instrumenten kann für das Klavier ein genaues Datum der Erfindung genannt werden. Es ist dies das Jahr 1709, in welchem der italienische Cembalohersteller Bartolomeo Cristofori ein Instrument mit dem Namen "*gravicembalo col piano e forte*" vorstellte. Das Besondere daran war eine völlig neue Anschlagmethode. Die Saiten wurden nicht mehr wie beim Cembalo durch Federkiele angerissen, sondern durch mit Leder bezogene Holzhämmer angeschlagen. Diese Technik erlaubte eine direkte Beeinflussung der Dynamik durch den Spieler. Dieses erste Klavier bestand vollständig aus Holz und hatte einen Tonumfang von vier Oktaven. Aus dem Jahre 1720 ist ein vollständiges Instrument erhalten, welches im "Metropolitan Museum of Art" in New York ausgestellt ist.

Der Wunsch nach größerem Tonumfang und höherer Dynamik führte zu mehr Tasten und immer schwereren Saiten. Um den Kräften Stand zu halten, wurde der Bspannrahmen zuerst mit Eisenteilen verstärkt und später durch einen aus Gußeisen gefertigten Rahmen ersetzt. Der Amerikaner Babcock stellte 1825 den ersten vollständig aus Eisen gegossenen Rahmen vor. Diese Konstruktion hatte gegenüber Holz den Vorteil, daß sie weniger auf Umwelteinflüsse (Temperatur, Luftfeuchtigkeit) reagierte und somit eine bessere und zeitstabilere Stimmung erreicht werden konnte. Ein Jahr später erfand Pape den mit Filz überzogenen Hammer. Die aus heutiger Sicht einschneidendste Neuerung gelang 1821 Sebastian Erard. Die von ihm erfundene Doppelrepetitionsmechanik wird in fast unveränderter Form bis heute eingesetzt. Die einfachere und leichtere Wiener

Mechanik existierte zwar eine Zeit lang parallel, verschwand aber zu Beginn unseres Jahrhunderts. Im zwanzigsten Jahrhundert sind keine bahnbrechenden Neuerungen zu verzeichnen, wohl aber gab und gibt es immer wieder Versuche, mit neuen Materialien und Fertigungstechniken Verbesserungen zu erzielen. Berühmte Musiker wie etwa Richard Wagner oder Franz Liszt spielten auf Instrumenten, welche sich kaum von den heutigen unterschieden.

Trotz einer Vielzahl von elektronischen Nachbauten hat das Klavier in seinen verschiedenen Bauformen einen festen Platz in der gegenwärtigen Musik. 1988 wurden weltweit etwa 900000 Stück produziert [1].

1.3 Aufbau eines Klaviers

Die prinzipielle Funktionsweise der Klangerzeugung ist sehr einfach erklärt. Ein Hammer schlägt auf eine Saite und versetzt diese in Schwingung. Der Steg überträgt die Energie in den Resonanzboden, welcher den Klang in die Umgebung abstrahlt. Abbildung 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines modernen Konzertflügels.

Abbildung 1 [1]

Der Korpus besteht aus geformten und verleimten Hartholzschichten. Er ist bis zu 9cm dick, hat eine Höhe von etwa 30cm, und seine Masse kann bei einem Flügel 200kg erreichen. Diese Masse und Festigkeit sind notwendig, da der Korpus als Träger für den Resonanzboden, den gußeisernen Bespannrahmen und die Anschlagmechanik dient.

Die Saiten sind unter beträchtlicher Spannung zwischen den Befestigungsstiften und den Stimmwirbeln eingespannt. Die gesamte von den Saiten verursachte Kraft beträgt etwa 210000 Newton [32]. Bei Christoforis "*Pianoforte*" waren es gerade 7500 N. Der Steg und die Agraffe (oder *capo d' astro* für den Diskant) bilden die Begrenzungen für den schwingenden Teil der Saiten. Das moderne Klavier hat 88 Tasten und einen Tonumfang vom Subkontra A (A0) bis zum c'''' (C8). Um eine höhere Lautstärke in den mittleren und hohen Lagen zu erzielen, sind diese Töne zwei- und dreifach bespannt. Im Baß verwendet man mit Kupferdraht umwickelte Stahlsaiten. Da die Teiltöne einer gewissen Inharmonizität unterliegen, muß dieser Effekt beim Stimmen berücksichtigt werden. Es entsteht die sogenannte Spreizung. Das heißt, daß die tiefen Töne etwas tiefer und die hohen etwas höher gestimmt werden, als es die temperierte Stimmung verlangt. Diese Eigenschaft ist typisch für den Klang eines Klaviers. Der Anschlagmechanismus bildet die Schnittstelle zwischen Musiker und Instrument. Die Bewegung der Taste wird über ein kompliziertes System von Hebeln und Gelenken auf den Hammer übertragen. Abbildung 2 zeigt eine moderne "Englische Mechanik". Diese von Erard erfundene Doppelrepetitionsmechanik erlaubt einen weiteren Anschlag noch bevor der Hammer in seine Ausgangsposition zurückgefallen ist. Diese Eigenschaft ermöglicht rasches, lebendiges Spiel und führte dazu, daß diese Mechanik heute in fast allen Klavieren eingesetzt wird. Da sich die Eigenschaften des Hammers direkt auf den Klang auswirken, gehört das richtige "Intonieren" (Auflockern des Filzes mit Nadeln, aber auch Härten durch chemische Zusätze, sowie das Feilen zur Erzielung der gewünschten Form) zu den wichtigsten Aufgaben eines Klavierstimmers.

Abbildung 2 [1]: Beispiel einer modernen englischen Mechanik

Ein besonders charakteristisches Merkmal für den Klavierklang, aber auch für viele andere Instrumente ist eine von der Spieldynamik abhängige Änderung der Klangfarbe. Abbildung 3 zeigt die unterschiedlichen Spektren dreier Töne (pp - mf - ff). Die Spektren sind zur besseren Vergleichbarkeit so normiert, daß jeder Ton die gleiche Gesamtenergie enthält. Auffallend ist der starke Abfall der Teiltöne bei pianissimo.

Abbildung 3 [14]: Spektren von Klavierklängen unterschiedlicher Lautstärke

Ein weiteres Merkmal für den Klang des Klaviers ist sein Ausschwingverhalten. Nach dem Anschlag fällt der Pegel rascher ab als in der Endphase des Klanges. Die hohen Teiltöne werden zusätzlich noch stärker gedämpft als die tiefen. In Abbildung 4 ist der Ausklang der ersten neun Teiltöne eines aufgezeichneten c" dargestellt.

Abbildung 4

2 Genaue Beschreibung der Funktionseinheiten

1 Saiten

1 Allgemeines über Chordophone

Eine zwischen zwei Punkten fest eingespannte Saite stellt ein schwingungsfähiges System dar. Bei vielen Musikinstrumenten wird dieser Effekt zur Klangerzeugung genutzt.

In einer Sage über die Entstehung der Musik ist von jenem antiken Göttersohn die Rede, der über einen am Boden liegenden Schildkrötenpanzer stolperte, dabei eine quer über den Schildpanzer verspannte Tiersehne berührte und auf diese Weise den ersten Instrumentalton erzeugte [5]. Als gemeinsamer Ursprung aller Chordophone kann trotz der Anschaulichkeit so mancher Sage der aus der Frühzeit stammende Musikstab bezeichnet werden.

In der heutigen Systematik werden die Saiteninstrumente meist nach der Art der Klanganregung eingeteilt. Man unterscheidet demnach zwischen Zupf-, Streich- und Schlaginstrumenten. Bei den Zupfinstrumenten wie etwa der Gitarre, aber auch dem Cembalo werden die Saiten mit den Fingern oder einem geeigneten Hilfsmittel kurz ausgelenkt, und danach schwingen sie frei weiter. Hingegen ist bei den Streichinstrumenten der Anregungsvorgang wesentlich komplexer, da während der gesamten Dauer eines Tones eine Wechselwirkung zwischen Bogen und Saite besteht. Es wird somit ständig Energie in das Instrument transportiert. Das ermöglicht dem Spieler, den Klang auch während eines gehaltenen Tones in vielerlei Hinsicht zu beeinflussen. Bei den Zupfinstrumenten ist das nur in beschränktem Ausmaß möglich (z.B. Vibrato bei einer Gitarre).

Die dritte Gruppe stellen die Instrumente dar, bei denen die Saiten mit einem Hammer oder etwas Ähnlichem angeschlagen werden. Bei diesen Instrumenten hat der Musiker nach dem Anschlag praktisch keine Möglichkeit, den Klang zu verändern.

Das Klavier ist mit Sicherheit der wichtigste Vertreter dieser Gruppe. Bevor ich näher auf dieses Instrument eingehe, möchte ich die schwingende Saite etwas genauer beschreiben.

2 Mathematische Beschreibung einer schwingenden Saite

1 Physikalische Größen von Saiten

Dieser Punkt enthält neben den beschreibenden Größen auch grundlegende Formeln und soll eine einheitliche Bezeichnung der Größen für die gesamte Arbeit schaffen.

L	...Länge der Saite (schwingender Teil)	[m]
d	...Durchmesser der Saite	[m]
μ	...Masse pro Längeneinheit (Massebelag)	[kg / m]
ρ	...Dichte	[kg / m ³]
M	...Gesamtmasse $\mu \cdot L$	[kg]
E	...Elastizitätsmodul	[N / m ²]
a	...Abstand des Anschlagpunktes von der Agraffe	[m]
b	...Abstand des Anschlagpunktes vom Steg	[m]
α	...Verhältnis a / L	[1]

T	...Spannkraft der Saite	[N]
R_0	...Wellenimpedanz der eingespannten Saite	[kg/s]
δ	...Dämpfungskonstante	[1/s]

Eine wichtige abgeleitete Größe ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c (m/s) einer Transversalwelle entlang der Saite. Für eine biegeschlaffe Saite ist diese konstant und beträgt:

Sie bestimmt zusammen mit der Länge die Grundfrequenz f_1 (Hz) der eingespannten Saite.

Weiters ist die Wellenimpedanz von Bedeutung.

Diese mechanische Impedanz gibt darüber Auskunft, welchen Widerstand die Saite einer erzwungenen Bewegung entgegensetzt.

2 Herleitung der Differentialgleichung [2]

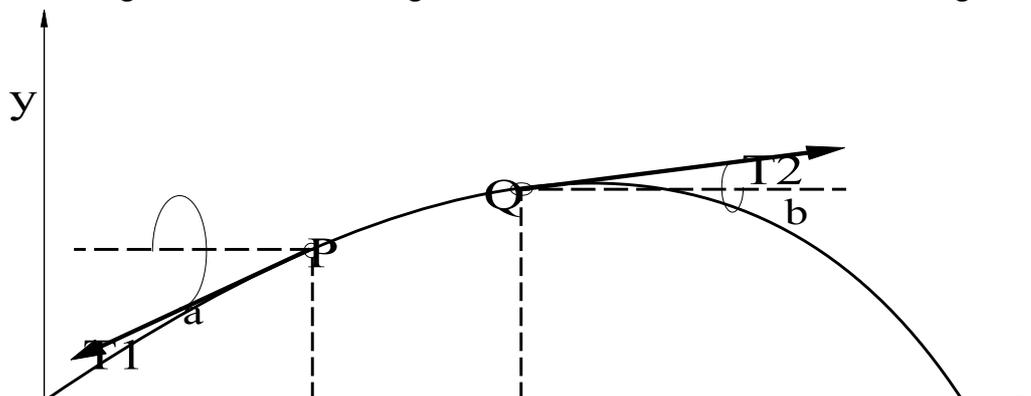
Eine elastische Saite sei zwischen zwei festen Punkten eingespannt. Nach einer kleinen Anfangsauslenkung soll sie frei schwingen. Um in einem ersten Schritt das Problem einfach beschreiben zu können, sind folgende Annahmen zu treffen.

1. Die Masse der Saite pro Längeneinheit ist konstant ("homogene Saite"). Die Saite ist völlig elastisch und setzt einer Biegung keinen Widerstand entgegen.
2. Die Spannung der Saite ist so groß, daß der Einfluß der Gravitationskraft vernachlässigt werden kann.
3. Die Saite führt nur sehr kleine transversale Bewegungen in der Vertikalebene aus.

Unter diesen Annahmen wird die Auslenkung $y(x,t)$ einer realen Saite, welche sehr stark eingespannt ist und nur kleine Auslenkungen ausführt, gut beschrieben. In Abbildung 5 ist eine Skizze der ausgelenkten Saite mit den entsprechenden Bezeichnungen dargestellt.

Wir betrachten die Kräfte auf der Saite. Da es sich um eine biegeschlaffe Saite handelt, müssen die Kräfte in einem Punkt tangential zur Saite verlaufen. Die Komponenten T_1 und T_2 sollen die Kräfte in den Endpunkten P und Q des Saitenstückes sein. Da die Saite keine horizontalen Bewegungen ausführt, müssen die Horizontalkomponenten gleich groß und konstant sein.

Abbildung 5: Skizze einer ausgelenkten Saite mit den in der Herleitung verwendeten



Bezeichnungen.

In vertikaler Richtung wirken die Kräfte $-T_1 \sin \alpha$ und $T_2 \sin \beta$. Das kurze Stück der Saite zwischen den Punkten P und Q hat eine Masse von $\rho \Delta x$ und besitzt eine Trägheitskraft, welche der Bewegung entgegenwirkt.

Mit Hilfe von (4) kann (5) folgend geschrieben werden:

$\tan \alpha$ und $\tan \beta$ sind die Steigungen in den Punkten x und $x + \Delta x$:

Die Division von (6) durch Δx ergibt:

Der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ ergibt die lineare eindimensionale partielle Differentialgleichung für die schwingende Saite.

3 Lösung der Gleichung durch Separationsansatz

Die Randbedingungen für die eingespannte Saite lauten:

Die Anfangsbedingungen sind durch die Auslenkung und durch die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben.

Nun gilt es eine Lösung zu finden, welche der Differentialgleichung und den Bedingungen genügt. Die Methode der Separation der Variablen führt auf folgenden Ansatz:

Die Auslenkung der Saite sei das Produkt der Funktionen F und G, welche jeweils nur von einer Variablen abhängen. Die zweimalige partielle Differentiation von y nach x und t ergibt die folgenden Gleichungen:

Ein Punkt bezeichnet eine zeitliche Ableitung und ein hochgestelltes Komma eine örtliche. Setzt man obige Gleichungen in (9) ein, so erhält die Wellengleichung folgende Form:

Nach der Division durch $c^2 FG$ erhält man eine Gleichung, bei welcher die eine Seite nur von der Zeit und die andere nur vom Ort abhängt.

Eine Änderung der Zeit beeinflusst nur die linke Seite der Gleichung, und eine Änderung des Ortes respektive nur die rechte. Damit die Gleichung stets ihre Gültigkeit behält, müssen beide Seiten konstant sein, was durch die beliebige Konstante k ausgedrückt wird.

Mit dieser Annahme erhält man aus Gleichung (15) zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, welche jeweils nur von einer Variable abhängen.

und

Nun müssen Lösungen für F und G gefunden werden, sodaß $y = G \cdot F$ den Randbedingungen genügt.

Die Funktion $G(t)$ darf nicht ident null sein, damit eine von null verschiedene Auslenkung $y(x,t)$ zustande kommt. Die Randbedingungen lauten somit:

Für die Berechnung von F aus Gleichung (16) kann leicht gezeigt werden, daß nur für eine negative Wahl der Konstante k physikalisch sinnvolle Lösungen möglich sind. Ersetzt man k zugunsten einer übersichtlicheren Schreibweise mit $-p^2$, erhält man folgende Differentialgleichung:

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet:

Mit Hilfe von (19) erhält man:

Um nicht $F \equiv 0$ zu erhalten, muß B ungleich null sein. Der Einfachheit wegen wählen wir $B = 1$. Der Term $\sin(pL)$ wird null, wenn
ist, woraus sich eine unendliche Lösungsschar für $F(x)$ ergibt.

Die Lösung von $G(t)$ erfolgt nach demselben Muster. Mit Berücksichtigung der Lösung von p (23) kann die Differentialgleichung (17) folgend geschrieben werden:

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist bereits bekannt (21) und lautet:

Da die Differentialgleichung (9) linear und homogen ist, kann ihre Lösung als unendliche Summe der einzelnen Lösungen $y_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ dargestellt werden:

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen können die Koeffizienten und
berechnet werden.

4 D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung

Dieser 1747 von D'Alembert vorgestellte Ansatz stellt eine weitere und aus Gründen des physikalischen Verständnisses interessante Möglichkeit zur Lösung der Wellengleichung dar. Dazu werden die zwei folgenden unabhängigen Variablen eingeführt.

Die Auslenkung y wird somit eine Funktion von v und z . Nun müssen die partiellen Ableitungen nach x und t , welche durch tiefgestellte Buchstaben gekennzeichnet sind, gefunden werden. Die Zuhilfenahme der Kettenregel führt zu folgenden Gleichungen:

Eine weitere partielle Differentiation führt zur Formel:

Dieselbe Prozedur wird auch auf die zeitlichen Ableitungen angewendet.
Die Differentialgleichung (9) erhält nun folgende Form:

Diese Gleichung kann durch zweimalige Integration gelöst werden. Die Integration über z ergibt

Die Funktion $h(v)$ hängt nur von v ab. Eine weitere Integration über v führt zur folgenden Gleichung:

Man erhält nun je eine nur von v oder z abhängige Funktion. Die Rücksubstitution von (30) ergibt jene Gleichung, welche als D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung

bekannt ist.

Mit der Anfangsbedingung $g(x)=0$ erhält man eine sehr einfache Lösung:

Die beiden unterschiedlichen Lösungen (27,37) der Saitenschwingungsgleichung (9), welche bei gleichen Voraussetzungen natürlich das selbe Ergebnis liefern, erlauben auch unterschiedliche, aber anschauliche physikalische Interpretationen. 27 ist als Überlagerung der stehenden Wellen (Moden) der Saite zu verstehen. Der Pegel und der zeitliche Verlauf sind durch die Koeffizienten A_n und B_n bestimmt. Lösung 37 ist die Addition einer nach links und einer nach rechts laufenden Wellenfront. Die Form der Welle wird durch die Anfangsbedingungen vorgegeben.

5 Verlustbehaftete Saitenschwingung

Bei jeder realen schwingenden Saite gibt es Verluste aufgrund der inneren Reibung, des Luftwiderstandes und der nicht absolut starren Begrenzung. Diese können durch eine Erweiterung der Wellengleichung (9) mit den zeitlichen Ableitungen ungerader Ordnung der Auslenkung berücksichtigt werden. Im einfachsten Fall sind die Verluste direkt proportional zur transversalen Saitengeschwindigkeit und unabhängig von der Frequenz. Zur quantitativen Beschreibung wird eine Dämpfungskonstante (δ) eingeführt.

Für kleine Auslenkungen gilt [20] :

Die nach rechts bzw. nach links laufenden Wellen y_r und y_l unterliegen in Richtung der Ausbreitung einer exponentiellen Dämpfung. Um die Verluste frequenzabhängig zu machen, müssen auch Ableitungen höherer Ordnung berücksichtigt werden. Beim Klavier entsteht diese Frequenzabhängigkeit vor allem durch die Koppelung der Saiten an den Steg. Aber auch die innere Reibung und die Verluste an die umgebende Luft steigen mit der Frequenz an.

6 Differentialgleichung für eine biegesteife Saite

Bis jetzt wurde die Saite als völlig biegeschlaff angenommen. Dies trifft für eine reale Saite nicht zu. Es entsteht eine zusätzliche Kraft, welche durch die Biegung verursacht wird. Die pro Längeneinheit wirkende Kraft Q kann durch folgende Formel angegeben werden:

Der Buchstabe J bezeichnet dabei das äquatoriale Trägheitsmoment der Querschnittsfläche der Saite. Für einen kreisförmigen Querschnitt gilt:

Erweitert man Gleichung (9) mit (41), erhält man folgende neue Differentialgleichung:

Die von der Biegesteifigkeit verursachte Rückstellkraft entsteht durch das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche der Saite, dem Elastizitätsmodul E und y'''' . Aus Formel 42 ist ersichtlich, daß vor allem eine Änderung des Durchmessers einen großen Einfluß auf das Schwingungsverhalten hat. Ist dieser entsprechend groß, verhält sich die Saite wie ein schwingender Stab, bei dem die Steifigkeit die einzige Reaktionskraft erzeugt. Der Term zweiter Ordnung wird gegenüber dem vierter Ordnung verschwindend klein.

Wird die Saite hingegen sehr stark gespannt und der Durchmesser sehr klein gehalten, verschwindet der Term vierter Ordnung. Diese Bedingungen schaffen ungefähr jene Verhältnisse, die den eingangs von Punkt 2.1.2.2 getroffenen Annahmen entsprechen. Es entsteht wieder Gleichung (9).

Bei einer realen Saite überwiegt zwar der Term zweiter Ordnung, aber die Steifigkeit muß durch einen Korrekturterm, welcher die Inharmonizität beschreibt, berücksichtigt werden. In erster Näherung kann dieser durch die Frequenzabhängigkeit der transversalen Ausbreitungsgeschwindigkeit angegeben werden [20].

Die Frequenzen f_n , bei welchen sich stehende Wellen auf der Saite ausbilden, können auf folgende Weise berechnet werden:

Setzt man (44) in die D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung ein, erhält man eine anschauliche Lösung von (43).

7 Differentialgleichung für eine biegesteife und verlustbehaftete Saite

Für eine vollständige Beschreibung des Verhaltens einer realen schwingenden Saite sind natürlich beide oben genannte Einflüsse zu berücksichtigen. Ohne eine genaue Herleitung zu vollziehen, ist hier eine Differentialgleichung angegeben, welche eine Kombination aus (39) und (43) darstellt [34]. Zusätzlich gibt es noch Terme mit gemischten partiellen Ableitungen zur Berücksichtigung von frequenzabhängigen Verlusten.

Die Faktoren δ_1 und δ_2 sind weitere Dämpfungskonstanten mit entsprechenden Einheiten.

3 Die Besaitung des Klaviers

Der große Tonumfang eines modernen Klaviers von mehr als sieben Oktaven stellt große Ansprüche an die Saiten dieses Instrumentes. Aus Gleichung (2) ist leicht ersichtlich, daß keine der für die Grundfrequenz verantwortlichen Größen konstant gehalten werden kann. Für Saiten mit gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit würde das Verhältnis der Längen zwischen höchster und tiefster Saite 1:155 betragen. Das ergäbe, bezogen auf die kürzeste Saite eines gewöhnlichen Klaviers, eine Länge von 8.2 Metern (!). Beim realen Instrument werden daher vor allem die Länge und der Massebelag variiert. Für die Längenänderung einer Saite zur nächsttieferen kann ein Faktor $1 < S < 1.06$ [32] angegeben werden. Bei großen Klavieren ist dieser in weiten Bereichen konstant. Die Spannung unterliegt keinen starken Schwankungen, steigt aber tendenziell zu den hohen Saiten hin an, wo sie durch die Zugfestigkeit begrenzt ist.

Tabelle 1 zeigt durchschnittliche Werte für die Saiten eines modernen Konzertflügels. Alle Angaben beziehen sich auf Einzelsaiten.

	L[m]	α	μ [g/m]	M[g]	d[mm]	T[N]	R_s [kg/s]
von	0.053	1 / 12	5	0.6	0.8	650	2
bis	2.2	1 / 7	80	200	1.2	1200	13

Um im Baß die Länge der Saiten in Grenzen zu halten, müssen diese sehr schwer sein. Der Durchmesser kann nicht beliebig vergrößert werden, ohne dabei die Biegesteifigkeit zu erhöhen. Deshalb verwendet man einfach, bei Pianinos auch doppelt umwickelte Stahlsaiten. Das äußere Material besteht aus Kupfer oder aus verkupferem Stahl. Um eine gute Stabilität zu gewährleisten, wird die Umwicklung bei der vorgespannten Saite durchgeführt. Die einzelnen Windungen werden so angebracht, daß sie sich gerade nicht berühren. Die Herstellung dieser Saiten muß mit besonderer Sorgfalt geschehen, da der Klang durch mögliche innere Verluste stark verschlechtert werden kann. Anstatt eines hellen, lebendigen Klangbildes entsteht ein dumpfer, matter Ton.

Für mathematische Beschreibungen kann die durch die Umwicklung bewirkte Erhöhung des Massebelages mit dem Lastfaktor F angegeben werden [32]. Für eine einfach umwickelte Saite lautet dieser:

Der Index "c" bezieht sich auf die innere Saite und der Index "w" auf die Umwicklung.

Ähnliches gilt auch für die doppelt umwickelte Saite. Der Index "u" kennzeichnet die innere der beiden Wicklungen:

Für nicht umwickelte Saiten ist $F=1$ zu setzen.

In der Mittellage werden die Töne doppelt, und im Diskant dreifach besaitet. Dies dient in erster Linie zur Erhöhung der Lautstärke, hat aber auch durch die Interaktion der Saiten untereinander einen Einfluß auf den Klangcharakter. Ab etwa dem c' unterscheiden sich die verschiedenen Fabrikate hinsichtlich ihrer Besaitung kaum voneinander. Der Übergang von den umwickelten zu den glatten Saiten erfolgt je nach Größe des Instrumentes zwischen F und f. In der 3. Oktave findet auch der Übergang zu den dreifach besaiteten Tönen statt. Ein Klavier hat insgesamt etwa 150 Saiten.

4 Inharmonizität bei einem realen Instrument

Wie unter 2.3 erwähnt, wird bei den meisten Saiteninstrumenten, vor allem aber beim Klavier der Klangcharakter durch die Inharmonizität der Teiltöne nachhaltig geprägt. Eine mathematische Beschreibung wurde in Punkt 2.1.2.6 aufgezeigt. Die Voraussetzungen für eine experimentelle Untersuchung an einem realen Instrument sind eine genaue Messung der Bewegung der Saite bzw. des Luftschalles und eine gute spektrale Analyse als Grundlage für eine sehr genaue Bestimmung der Teiltonfrequenzen.

Die Inharmonizität hat bei der Stimmung eines Klaviers eine wichtige Bedeutung. Zur gehörsmäßigen Stimmung wird für gewöhnlich die Schwebung zwischen dem zweiten Teilton und dem Grundton des eine Oktave höheren Tones ausgenützt. Es werden jedoch auch Teiltöne höherer Ordnung zur Stimmung herangezogen. Die dadurch entstehende Spreizung beläuft sich bei gewöhnlichen Klavieren auf 30 bis 40 cent zwischen a' und c'''' [32].

Abbildung 6 zeigt die Inharmonizität des 16. Teiltones bei verschiedenen Klavieren. Es ist deutlich ersichtlich, daß gravierende Unterschiede zwischen den einzelnen modernen Instrumenten im Baßbereich auftreten. In dieser Lage sind die einzelnen Bauformen akustisch am besten voneinander zu unterscheiden. Die Frage nach dem optimalen Grad der Inharmonizität ist stark von den persönlichen Vorstellungen abhängig und kann deshalb nicht einfach beantwortet werden. Sowohl von Musikern als auch von Herstellern gibt es jedoch Tendenzen hin zum Klang eines Konzertflügels. Daraus könnte

man schließen, daß Instrumente mit weniger Inharmonizität bevorzugt werden. Eine subjektive Beschreibung der Auswirkung der Inharmonizität auf den Klang erfolgt oft mit Worten wie metallisch, lebendig oder warm.

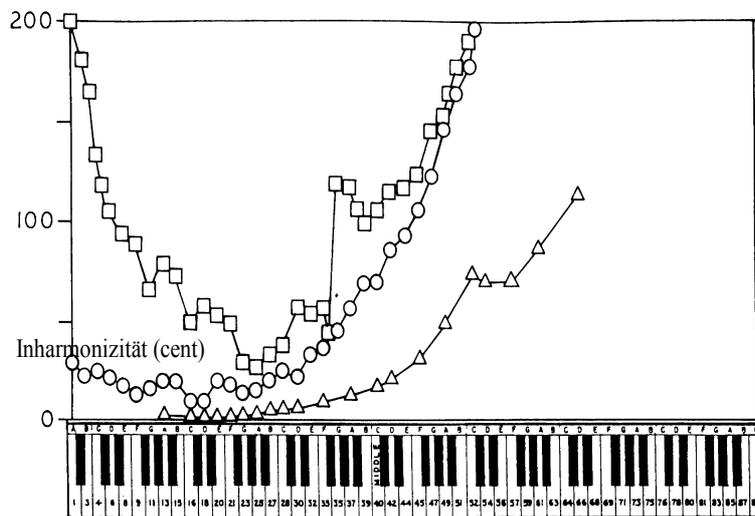


Abbildung 6
[32]:
Inharmonizität
des 16. Teiltons
bei
verschiedenen
Instrumenten.
Konzertflügel
(Kreise),
Piano
(Vierecke),
Cristofori-
Klavier
(Dreiecke).

Zur Berechnung der inharmonischen Teiltöne kann Formel (45) herangezogen werden. Zur besseren Übersicht ist es von Vorteil, die Inharmonizität als Abweichung von der harmonischen Teiltonfrequenz anzugeben. Günstigerweise verwende ich für die Berechnungen das logarithmische Maß cent. Die Umrechnung von einem Frequenzverhältnis in cent geschieht auf folgende Weise:

Wendet man diese Umrechnung auf (45) an, ergibt sich die Inharmonizität I_n für die einzelnen Teiltöne [12], [20].

In erster Näherung kann diese Formel mit angegeben werden; n ist dabei die Teiltonnummer und b die Inharmonizitätskonstante. Abbildung 7 zeigt die Inharmonizität der ersten 16 Teiltöne für ein Kontra-C eines Klaviers. Hier sieht man, daß die tatsächlich gemessenen Inharmonizitäten (Kreise) deutlich von der $b \cdot n^2$ Beziehung (strichlierte Linie) abweichen. Für die zweite Kurve (Dreiecke) wurde in Anlehnung an die Psychoakustik ein virtueller Grundton aus den Teiltönen 4-16 berechnet, auf welchen die Inharmonizität bezogen wurde. Diese Punkte passen wesentlich genauer, jedoch ergeben sich für die Teiltöne 2 und 3 negative Werte. Daß diese Berechnung des Grundtones sinnvoll ist, zeigt die Tatsache, daß manche Klaviere besser klingen, wenn sie in der extremen Baßlage tiefer gestimmt werden, als es die Methode mit der Schwebungsfrequenz von null Hertz zwischen dem 2. Teilton und dem Grundton des eine Oktave höheren Tones vorgibt. Hier werden Teiltöne höherer Ordnung zur Stimmung herangezogen. Die Tonhöhenempfindung für die tiefsten Töne wird aufgrund der geringen Empfindlichkeit des menschlichen Gehörs für tiefe Frequenzen von den höheren Teiltönen stärker geprägt als vom Grundton selbst. Zusätzlich ist die akustische Leistung bei sehr tiefen Frequenzen relativ gering.

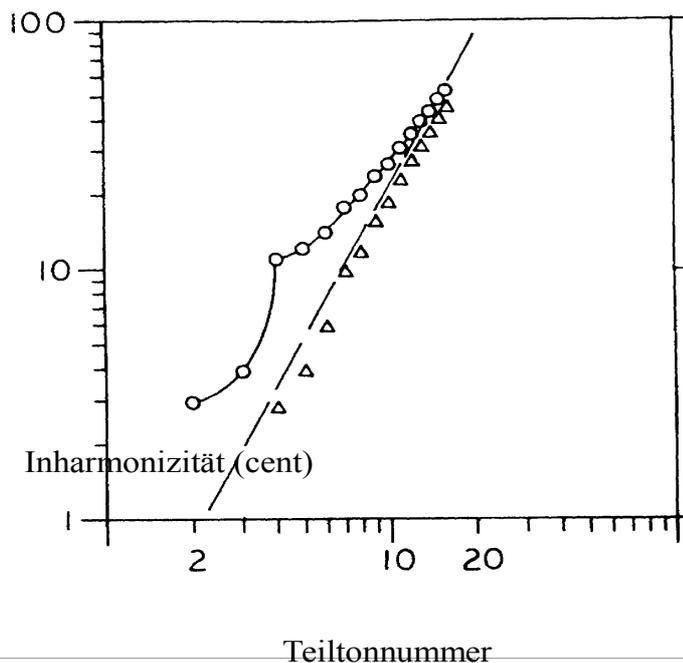


Abbildung 7 [32]

Der Knick in der ersten Kurve (Kreise) kann durch die Impedanz des Steges erklärt werden. Dieser hat bei 128 Hz (= 4. Teilton) eine starke Resonanz. Unterhalb dieser Frequenz ist der Abschluß federdominiert und oberhalb massedominiert. Das führt zu einer Absenkung der ersten

drei Teiltöne und zu einer Erhöhung ab dem 5. Teilton.

Der erste Teilton fehlt in beiden Fällen, da für diesen die Inharmonizität nicht direkt angegeben werden kann.

1 Ergänzende Formeln zur Inharmonizität

In Abbildung 7 ist zu erkennen, daß die gemessenen Werte nicht immer mit den berechneten übereinstimmen. Ich möchte aus diesem Grund einige zusätzliche Formeln von verschiedenen Autoren, welche die Inharmonizität eines realen Instrumentes beschreiben sollen, anführen und miteinander vergleichen.

Die Formeln sind nach ihrer Komplexität, beginnend mit der einfachsten, geordnet. Zur besseren Übersicht verwende ich eine gemeinsame Schreibweise und gebe immer die Inharmonizität in cent an, auch wenn dadurch eine vom Original abweichende Formulierung verwendet werden muß.

1. [14] gibt in seinem Artikel eine sehr einfache Beziehung zur Berechnung der Inharmonizität an.

Diese Formel entspricht in ungefähr (52). Der Autor stellte eine gute Übereinstimmung im mittleren Spielbereich fest.

2. [13] schlägt eine Methode vor, welche eine Ähnlichkeit mit (53) aufweist. Sowohl bei dieser, als auch bei der vorhergehenden Formel gibt es keinen direkten Bezug auf die physikalischen Eigenschaften der Saiten. Als Beispiel ist das Subkontra-A angeführt, bei welchem die Inharmonizitätskonstante $B=4.4 \cdot 10^{-4}$ die beste Übereinstimmung mit den gemessenen Werten liefert.

3. Die Einbeziehung von verschiedenen physikalischen Größen führt auf folgende Formel [32]:

Nach einer Umformulierung erhält man eine Gleichung, welche sich nur geringfügig von

(51) unterscheidet.

5. [34] gibt folgende Formel für die inharmonischen Teiltonkreisfrequenzen an:

Wird daraus die Inharmonizität berechnet, ergibt sich die selbe Formel, welche auch [32] angibt.

6. [19] gibt eine komplexe Beziehung für die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz an.

Daraus ergibt sich folgende Inharmonizität:

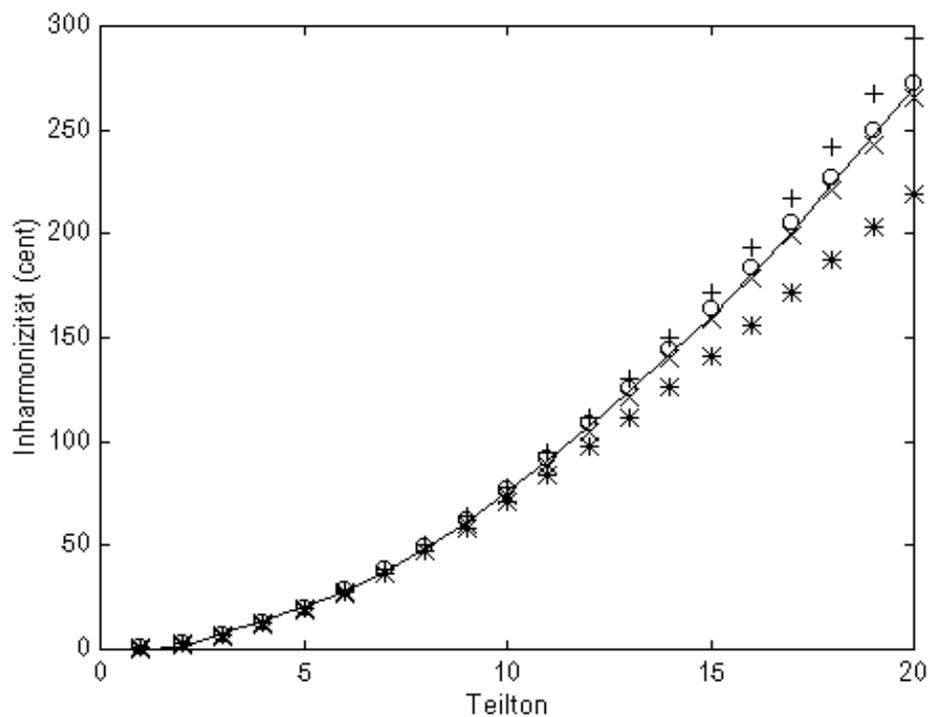


Abbildung 8: Berechnung der Inharmonizität nach den oben genannten Methoden im Vergleich mit einer tatsächlich gemessenen bei einem c" (durchgehende Linie). + (Formel 51), o (Formel 56 u. 58), x (Formel 54), * (Formel 60).

5 Longitudinale Saitenmoden

Neben der transversalen Auslenkung tritt auch in Längsrichtung der Saite eine Bewegung auf. Diese longitudinalen Saitenmoden sind durch die Abmessungen und Beschaffenheit der Saiten vorgegeben und können durch den Klavierstimmer nicht beeinflusst werden. Es ist schon bei der Herstellung jeder einzelnen Saite auf das Verhältnis zwischen dem ersten longitudinalen Mode LM1 und der transversalen Grundfrequenz TM1 zu achten. Für beide Frequenzen kann folgende allgemeine Formel zur Berechnung herangezogen werden:

Die Formel für die transversale Ausbreitungsgeschwindigkeit c_t erhält mit Berücksichtigung des Lastfaktors für umwickelte Saiten folgende Form:

Eine sehr ähnliche Formel kann auch für die Geschwindigkeit in Längsrichtung angegeben werden [33]:

Das Verhältnis von LM1 zu TM1 kann nun einfach berechnet werden.

Dieses beläuft sich bei realen Instrumenten auf 4200 bis 5200 cent [32]. Für einen schönen Klang soll es in einem harmonischen Zusammenhang mit dem restlichen Instrument stehen, da longitudinale Moden die Klangfarbe beeinflussen. Für eine ausgewogene Tonleiter sollte das Verhältnis abschnittsweise konstant gehalten werden. Ein zwischen den Tönen liegender Mode kann bei sehr tiefen Lagen sogar die Empfindung des Grundtones verfälschen.

In [33] wird anhand einer Reihe von Experimenten ein Nachweis über das Vorhandensein und die Entstehung von longitudinalen Saitenmoden erbracht. Als Grundlage diente die Messung der Verformung des Steges und des Resonanzbodens im Bereich der Saiten e und f mit Hilfe von Dehnungsaufnehmern. Die so gemessenen Schwingungsverläufe zeigten vor dem eigentlichen Signal durchwegs kleine Welligkeiten, welche nicht vom Aufschlag der Taste auf den Rahmen hervorgerufen wurden.

Eine Spektralanalyse dieses kurzen Vortrabanten ergibt für das e Maxima bei etwa 500 und 2700 Hz. Mit Hilfe der Formeln (61) und (63) erhält man mit realen Werten für E, ρ und L ziemlich genau diese Frequenz und somit einen Beweis, daß es sich tatsächlich um einen longitudinalen Mode handelt. Das vorzeitige Eintreffen dieser Schwingung kann durch die deutlich höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit (c_l) in Längsrichtung erklärt werden. Auch die Zeitabstände der einzelnen Signalanteile können anhand von (62), (63) und der Saitenlänge nachvollzogen werden. Weiters kann beobachtet werden, daß longitudinale Saitenmoden vor allem bei hohen Pegeln präsent sind.

Der Pegel der beobachteten Vortrabanten ist eine stark nichtlineare Funktion der Anschlagstärke, und die Entstehung der longitudinalen Saitenmoden kann somit auf die Dehnung der Saite durch die endliche Auslenkung zurückgeführt werden. Eine weitere mögliche Ursache stellt die Rotation des Hammerkopfes während des Anschlages dar. Dies hätte jedoch einen linearen Zusammenhang zwischen dem Pegel der longitudinalen Moden und der Anschlagstärke zur Folge und ist als Ursache nicht sehr wahrscheinlich. Die Übertragung der longitudinalen Saitenschwingung geschieht in erster Linie direkt auf den Steg, welcher auch Bewegungen in Richtung der Saiten auf den Resonanzboden weiterleitet. Es werden aber auch Kräfte normal zur Saite beobachtet, welche durch eine Änderung des Saitendurchmessers aufgrund der abwechselnden Dehnung und Kompression der Saite verursacht werden.

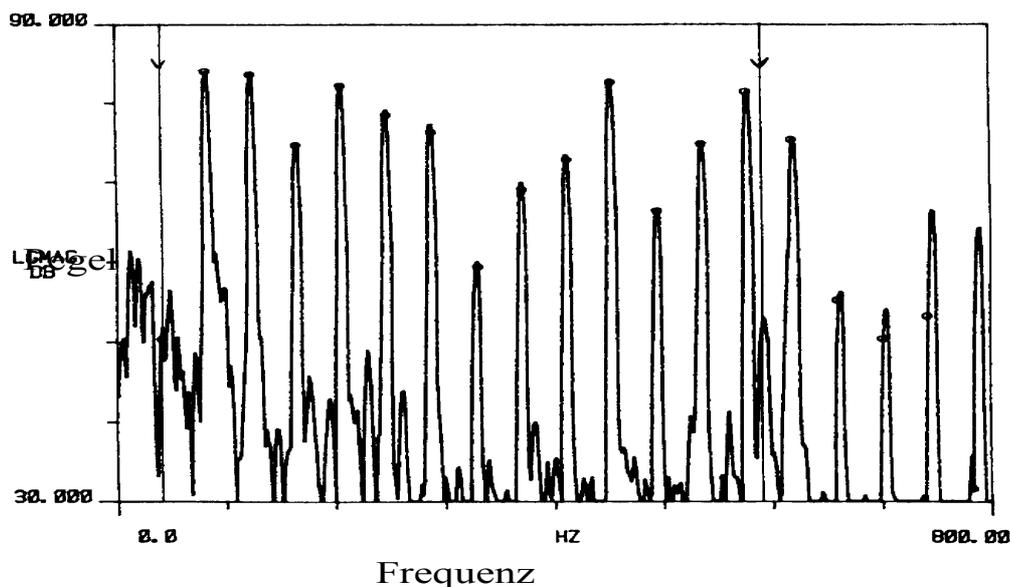


Abbildung 9 [32]: Kontra-E Spektrum mit deutlicher Erkennbarkeit des ersten longitudinalen Mode zwischen dem 14. und 15. Teilton.

Abschließend kann gesagt werden, daß longitudinale Saitenmoden einen wichtigen Beitrag zur Entstehung des für das Klavier typischen Klanges leisten. Der Steg und der Resonanzboden spielen dabei eine wichtige Rolle und sollten bei numerischen Modellen berücksichtigt werden [33].

6 Klangspektrum der angeregten Saite

Der Klang einer Saite hängt stark vom Ort und von der Art der Anregung ab. Beim Anschlag einer Klaviersaite genau in einem Schwingungsknoten können diese Frequenzen nicht angeregt werden. In Anlehnung an die Formeln (28) und (29) kann für die komplexen Amplituden bei zusätzlicher Wirkung einer externen Kraft $F(t)$ an der Position $x=L/N$ geschrieben werden [11]:

Bei jedem Mode n , welcher ein ganzzahliges Vielfaches von N ist, wird die Amplitude unabhängig von der wirkenden Kraft null. Beobachtungen zeigen jedoch, daß diese Moden zwar schwächer als die benachbarten, aber doch vorhanden sind. Ein möglicher Grund dafür ist die endliche Breite der Kontaktfläche des Hammers. Dies scheint jedoch nicht sehr wahrscheinlich zu sein, da die Kraft für gewöhnlich auf beiden Seiten der Berührungsfläche in die gleiche Richtung wirkt und somit keine Schwingung anregt. Sogar für den Fall einer unsymmetrischen Kraft, hervorgerufen durch eine reflektierte Welle am kürzeren Ende, wird der entsprechende Mode stark gedämpft.

Die weit wahrscheinlichere Ursache für nicht vollständig unterdrückte Moden stellt die Impedanz des Resonanzbodens dar. Masse und Federkraft verursachen eine Verschiebung des Endpunktes der Saite für bestimmte Frequenzen und somit eine

Abweichung des Knotens von der geometrisch erwarteten Position. Der resistive Anteil führt zu einer Dämpfung der reflektierten Welle um den Faktor $1 - 2R_0/R_b$, wobei R_b die Impedanz des Steges ist. Dadurch kommt es zu keiner vollständigen Auslöschung, und die Knoten führen kleine Bewegungen aus. Das Verhältnis von R_b zu R_0 liegt bei gewöhnlichen Instrumenten zwischen 10 und 100, was einer Dämpfung von 20 bis 40dB entspricht.

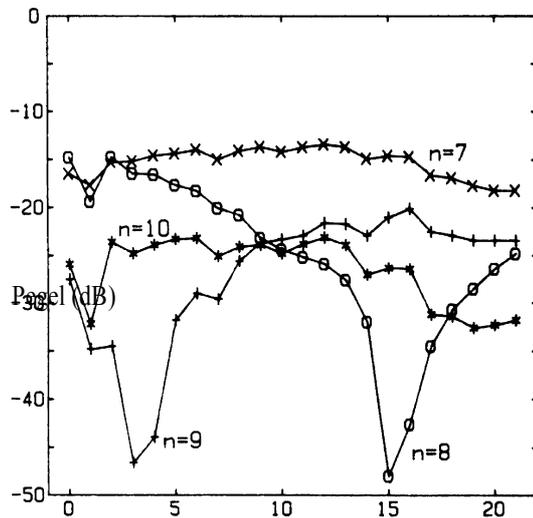


Abbildung 10 [11]: Relative Pegel der Teiltöne 7-10 in Abhängigkeit von der Position der Mechanik. Die werkseitige Einstellung liegt bei 18mm.

In einer Versuchsreihe wurden Messungen mit einem optischen Aufnehmer für die Saitenbewegung und einem FFT-Analysator durchgeführt [11]. Als Testinstrument diente ein Steinway Konzertflügel (Model D 9ft), dessen Mechanik um insgesamt 21mm verschoben werden konnte. Die mögliche Verschiebung der Mechanik überstrich den Bereich der Knoten des

8. und 9. Teiltönen des Versuchstons g. Das Zeitfenster für die FFT hatte eine Dauer von 80ms und begann etwa 8ms nach dem ersten Signalanstieg. Bei einem etwa 3ms dauernden Anschlagimpuls war somit eine freie Saitenbewegung während der Meßzeit garantiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 10 dargestellt. Zusätzliche Messungen des Luftschalles und der Bewegung des Steges mit Hilfe eines Beschleunigungsaufnehmers bestätigten dieses Ergebnis.

Weiters konnte durch Spektralanalysen zu verschiedenen Zeitpunkten gezeigt werden, daß kein Energietransfer durch eine mögliche nichtlineare Koppelung der Moden stattfindet. Ein schwacher Teilton gewinnt im Laufe der Zeit nicht an Intensität.

Eine weitere Möglichkeit zur Verstärkung "fehlender Teiltöne" stellen Transiente im Resonanzboden dar. Die anregende Kraft erzeugt eine Welle in beiden Richtungen entlang der Saite. Der als erster ankommende Teil kann den entsprechenden Teilton in seinem Spektrum aufweisen. Nach der Zeit $t_a = 2\alpha L/c$ erreicht jedoch der an der Agraffe reflektierte Anteil den Steg. Das heißt, daß erst nach der Zeit t_a die entsprechenden Frequenzen durch Gegenphasigkeit ausgelöscht werden. Die Überlagerung der beiden Wellenfronten kann als Kammfilterung aufgefaßt werden. Die in dieser kurzen Zeit im Resonanzboden gespeicherte Energie kann zum Teil wieder an die Saite abgegeben werden. Diese Energie reicht jedoch keineswegs aus, den fehlenden Teiltönen einen deutlich höheren Pegel zu verschaffen.

2 Der Hammer

Der Hammer des modernen Klaviers besteht aus einem etwa 10cm langen Stiel aus Holz und einem Hartholzkopf, welcher mit gepreßtem Filz überzogen ist. Im Gegensatz zu

alten Instrumenten verringert sich die Hammermasse von etwa 13g im Baß auf zirka 4g im Diskant. Das hat eine Auswirkung auf den Widerstand, den die Taste dem Pianisten entgegensetzt. Die Massen und Steifigkeiten der gesamten Teile der Anschlagmechanik bewirken, daß der Hammer nur eine bestimmte maximale Endgeschwindigkeit erreichen kann. Die Lautstärke kann ab einem gewissen Pegel nicht mehr durch stärkeres Anschlagen erhöht werden.

Die zum Teil sehr starken Beschleunigungen können verschiedene Eigenresonanzen des Hammerstieles anregen. Der erste Mode liegt in einem Bereich von 300 bis 500 Hz. Bei sehr starkem Anschlag können auch höhere Moden angeregt werden. Akustisch äußern sich diese Resonanzen als ein tonales "Tock" während des Anschlages und sind vor allem im Diskant gut wahrnehmbar. Nebeneinander liegende Hammerstiele sollten deshalb ähnliche Eigenschaften haben, um bei schnellen Läufen eine gleichmäßige Tonleiter zu gewährleisten. Die Auswahl der Stiele vor dem Zusammenbau muß bei guten Instrumenten sehr sorgfältig geschehen. Das Sortieren kann durch einfaches Aufschlagen der Stiele auf eine harte Fläche erfolgen, wobei sie nach der Tonhöhe ihrer Resonanz, ähnlich einer Tonleiter, geordnet werden.

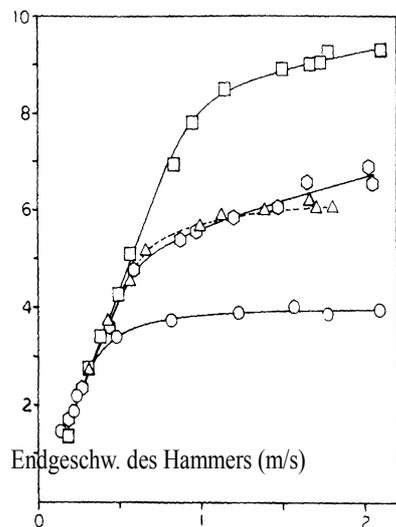


Abbildung 11 [30]:
Hammergeschwindigkeit in Abhängigkeit von der mittleren Tastengeschwindigkeit für verschiedene Hämmer und Instrumente. Taste 3 und 87 eines best. Klaviers (Kreise bzw. Sechsecke), Taste 3 und 87 eines Klaviers mit anderer Mechanik (Dreiecke bzw. Vierecke)

Die größte Auswirkung auf den Klang hat der Filz. Dieser wird unter Druck mit dem hölzernen Teil des Hammerkopfes verleimt. Die Härte des Filzes nimmt von außen nach innen zu. Weiters werden im

Diskant wesentlich härtere Hämmer als im Baß verwendet. Auch die richtige Form des Kopfes, welche durch Schneiden mit speziellen Messern und Feilen erzielt wird, spielt für den Klang eine entscheidende Rolle. Durch exzessives Spiel oder durch mangelnde Wartung flachgespielte Hämmer können nichtlineare Verzerrungen bei hohen Pegeln verursachen. Das unter 2.3 erwähnte Intonieren bezieht sich vor allem auf die richtige Trimmung des Härteverlaufes und der Form des Filzes. Ein zu weicher Hammer erzeugt einen dumpfen, ein zu harter einen aufdringlich hellen Klang. Der optimale Wert ist vom persönlichen Geschmack, sowie von der Raumakustik und der Musikrichtung abhängig.

1 Der Hammer als dynamisches System

Auflistung der Größen und Bezeichnungen:

m	...Hammermasse	[kg]
h	...Auslenkung des Hammerkopfes	[m]
Δh	...Eindrückung des Filzes	[m]
ξ	...Kompression des Filzes	[1]
C	...Federkonstante für den Filz	[N/m]
p	...Nichtlinearitätsexponent	[1]
$R(t)$...Relaxationsfunktion	[1]
τ_0	...Relaxationskonstante	[s]
ε	...Hysteresiskonstante	[s]
V	...Anfangsgeschwindigkeit des Hammers	[m/s]
F	...Allgemeine Bezeichnung für eine Kraft	[N]

In einer guten Näherung kann der Hammer als einfaches System aus einer Masse und einer Feder aufgefaßt werden. Dies ist zulässig, da fast die gesamte Masse im Hammerkopf konzentriert ist. Die Eindrückung des Filzes ist sehr gering im Verhältnis zur Länge des Hammerstieles. Die Bewegung des Hammers in der Kontaktphase kann deshalb als reine Translation aufgefaßt werden.

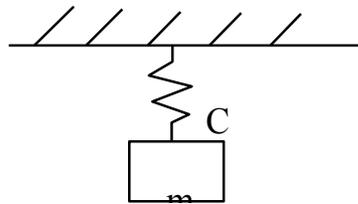


Abbildung 12: Mechanisches Modell des Klavierhammers

Die Bewegungsgleichung für dieses System lautet:
Die Kraft F entsteht durch die Eindrückung der Feder.

2 Nichtlinearität des Hammerfilzes

Der unterschiedliche Härtegrad und die Form des Kopfes ergeben eine stark nichtlineare Federkonstante des Filzes. Der Zusammenhang zwischen Eindrückung des Filzes und der Kraft kann mit Hilfe einer statischen Messung gefunden werden. Im einfachsten Fall genügen ein Satz von Gewichten zur Erzielung verschiedener Kräfte und ein Gerät zur genauen Erfassung der Eindrückung des Filzes. Zur analytischen Beschreibung können verschiedene Funktionen herangezogen werden. Am häufigsten wird folgendes Potenzgesetz angegeben [12],[14],[28].

Diese Funktion ist jedoch wegen der Exponentiation der Eindrückung mit der positiven reellen Zahl p physikalisch nicht sehr sinnvoll. Die Federkonstante C könnte nur für den Fall $p=1$ die Einheit [N/m] haben und müßte im allgemeinen Fall mit [N/m ^{p}] angegeben werden. Es ist wesentlich besser, mit einer dimensionslosen Größe für die Eindrückung, welche ich als Kompression ξ bezeichne, zu rechnen.

Der Bezug auf einen Wert von 1mm erscheint mir sinnvoll, da dies die Größenordnung

der maximal auftretenden Eindrückung ist. Gleichung (65) kann nun in folgender Form angegeben werden:

Die Federkonstante C wird durch die Kraft F_0 ersetzt, welche nun anstatt dieser die Härte des Filzes beschreibt. Der Grad der Nichtlinearität wird durch den Exponenten p angegeben.

Zur experimentellen Bestimmung von p trägt man die Eindrückung und die Kraft in doppelt logarithmischem Maßstab in ein Diagramm ein. Es entsteht eine Gerade, deren Steigung der Nichtlinearitätsexponent ist (siehe Abbildung 15).

Messungen von p ergeben Werte zwischen 1.5 und 3.5, ohne dabei eine Tendenz von den tiefen zu den hohen Tönen erkennen zu lassen. In Ausnahmefällen werden auch höhere Werte gemessen. Dazu sei noch bemerkt, daß allein durch die Form des Hammerkopfes ein Nichtlinearitätsexponent von etwa 1.5 entsteht, auch wenn das Material selbst lineares Verhalten aufweist.

3

2

1

Abbildung 13: Zeitlicher Verlauf der Kraft in Abhängigkeit von verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten des Hammers. $V=1\text{m/s}$ (1), $V=3\text{m/s}$ (2), $V=5\text{m/s}$ (3). Für p wurde in allen Fällen 2.5 angenommen. Der Hammer hatte eine Masse von 10g.

Zur grafischen Darstellung wurde obiges System (66) und (69) mit der MatLab-Toolbox Simulink, welches ein gutes Hilfsmittel zur Lösung von nichtlinearen Systemen darstellt, implementiert. Abbildung 13 zeigt den zeitlichen Verlauf der Kraft während des Kontaktes in Abhängigkeit von verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten des Hammers. Es ist deutlich die Abhängigkeit der Kontaktzeit von der Anschlagstärke zu erkennen. Diese Tatsache erklärt das Zustandekommen des spektralen Unterschiedes zwischen Piano und Forte.

Von weiterem Interesse ist die Auswirkung des Exponenten p auf den Kontaktverlauf. Zu Vergleichszwecken wurde hier die Anfangsgeschwindigkeit konstant gehalten. Die Konstante F_0 wurde so gewählt, daß sich in jedem der drei Fälle die gleiche maximale Kraft ergab (Abbildung 14).

1 2 3

Abbildung 14: Zeitlicher Verlauf der Kraft in Abhängigkeit des Exponenten p . $p=1.8$ (1), $p=2.5$ (2), $p=3.2$ (3). $V=3$ m/s, $m=10$ g.

Zu den Abbildungen 13 und 14 sei bemerkt, daß der Aufschlag auf eine harte Fläche erfolgt. Der zeitliche Verlauf der Kraft entspricht nicht dem beim Kontakt mit einer realen Saite.

Bei gehörsmäßigen Beurteilungen zeigt sich, daß der Nichtlinearitätsexponent bei klanglich bevorzugten Instrumenten meist zwischen 2 und 3 liegt. Werte außerhalb dieses Bereiches ergeben entweder ein Fortissimo, welches lediglich wie ein verstärktes Pianissimo klingt, oder der Klangunterschied bei unterschiedlicher Dynamik wird aufdringlich groß.

Eine weitere Möglichkeit zur analytischen Beschreibung der Nichtlinearität des Filzes stellt folgendes Polynom dar [13]:

Die genaue Approximation an die Meßwerte geschieht durch die Wahl der Koeffizienten k_1 bis k_3 . Es können jedoch Probleme durch das mögliche negative Vorzeichen von k_1 auftreten. Bei kleinen Auslenkungen ergibt sich eine negative Kraft, welche physikalisch nicht möglich ist.

Für Simulationen ist es von Vorteil, mit linearen Größen zu rechnen. Die Einführung einer effektiven Steifigkeit kann mit gewissen Einschränkungen in vielen Fällen eine Erleichterung schaffen [12].

Der Nachteil entsteht jedoch dadurch, daß für jede Anschlagstärke ein eigenes C_e berechnet werden muß.

3 Hystereseeigenschaft des Filzes

Der Filz hat neben der Nichtlinearität zusätzlich die Eigenschaft, daß er nach dem Wegnehmen der Kraft erst nach einer bestimmten Zeit seine ursprüngliche Gestalt annimmt. Diese Hysterese kann nur durch dynamische Messungen bestimmt werden. Meist werden dazu kleine Beschleunigungsaufnehmer am Hammer und Kraftsensoren auf der Kontaktfläche befestigt. Um sich zusätzliche Messungen der Bewegung des Aufschlagpunktes zu ersparen, sollte der Hammer auf eine möglichst harte Fläche aufschlagen. Die Form der Aufschlagfläche sollte den realen Bedingungen (Saiten) nachempfunden werden. Abbildung 15 [14] zeigt das Ergebnis solcher Messungen.

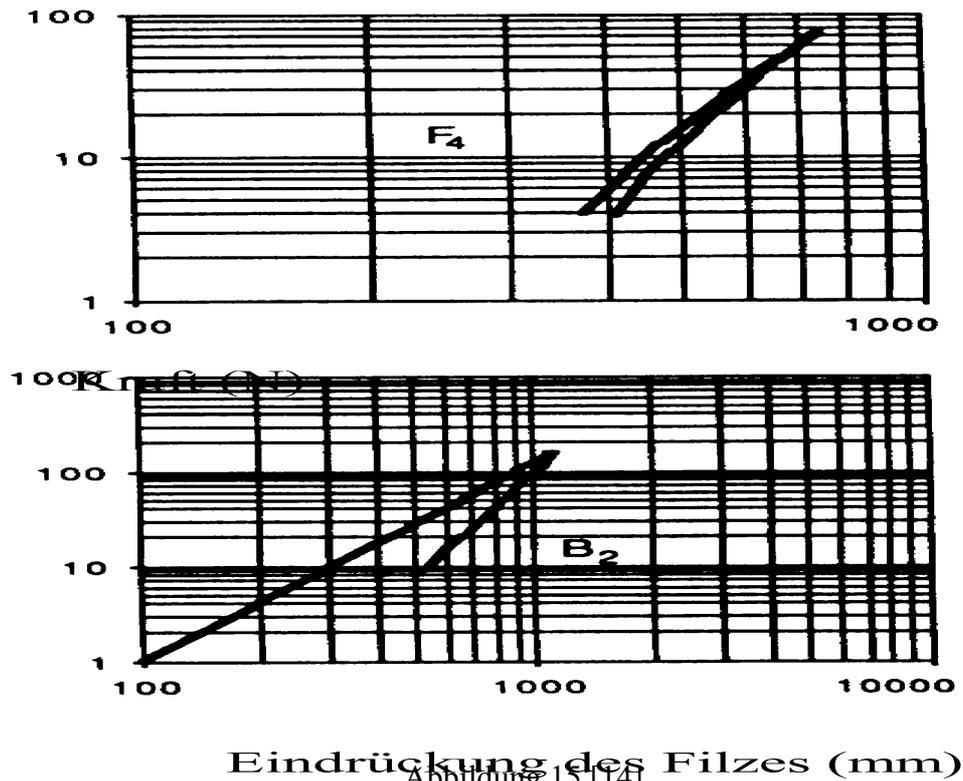


Abbildung 15 [14]

Man sieht deutlich die unterschiedlichen Steigungen der Geraden für die zunehmenden und abnehmenden Kräfte, welche auf die Hystereseeigenschaft zurückzuführen sind. Dabei fällt weiters auf, daß der Exponent p nicht nur vom Vorzeichen der Kraftänderung abhängt, sondern auch eine gewisse Unstetigkeit im Verlauf der Kompression zeigen kann (Knick in der F4-Kurve).

1 Mathematische Beschreibung der Hysterese

Eine einfache Möglichkeit zur Einbeziehung der Hysterese in analytische Berechnungen stellt folgender Ansatz dar [14]: Den Ausgangspunkt bildet Gleichung (69). Diese wird insofern erweitert, daß der zeitliche Verlauf der Kompression in die Berechnung miteinbezogen wird.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß bei der Interaktion des Hammers mit einer realen Saite die von den Begrenzungen reflektierten Wellen zu einer mehrfachen Kompression und Entspannung des Filzes während des Kontaktes führen können (siehe Interaktion). Für den Fall des Aufschlages auf eine harte Fläche gibt es nur eine einzige Kompression und Entspannung. Es entsteht ein Verlauf, wie er in Abbildung 15 zu sehen ist.

Die Berechnung in [14] stützt sich darauf, daß bei jeder Umkehr der Richtung der Kompression der Exponent p um ein bestimmtes Δp erhöht wird. Die Konstante F_0 wird im selben Zuge so angepaßt, daß ein stetiger Verlauf der Kurve gegeben ist. Vom Meßergebnis aus Abbildung 15 kann abgelesen werden, daß sich für den steigenden und fallenden Ast der Kurve verschiedene Exponenten p ergeben. Δp kann aus der Differenz der beiden Exponenten gebildet werden.

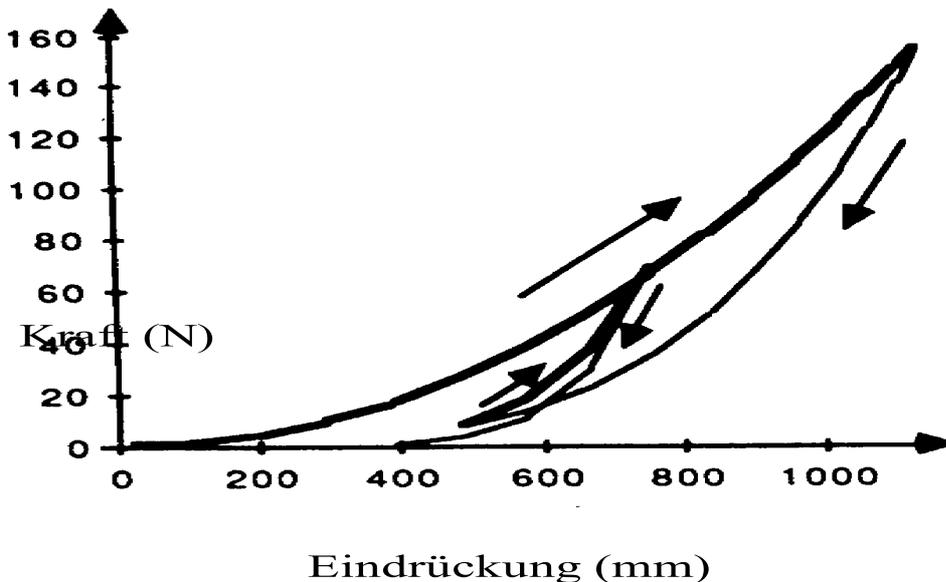


Abbildung 16 [14]: Kraftverlauf mit mehrmaliger Änderung der Kompression

Bei jedem Richtungswechsel der Kompression ist die Anfangssteigung der Kurve steiler als die Endsteigung der vorhergegangenen. Die zwischen den Ästen entstehende Fläche ist ein Maß für den durch die Hystereseeigenschaft verursachten Energieverlust.

Ein Problem, welches bei dieser Art der Berechnung auftritt, ist jenes, daß unabhängig vom Exponenten alle Kurven durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen. Das entspricht nicht der Realität, da der Kontaktverlust durch die bleibende Eindrückung schon früher auftritt. Um die Einfachheit der Berechnung zu wahren, kann man eine minimale Kraft annehmen (etwa $F_{\max}/100$), bei welcher der Kontaktverlust stattfinden soll. Abbildung 16 zeigt einen möglichen Verlauf der Kraft, bei dem auch eine mehrmalige Änderung der Kompression berücksichtigt ist.

Eine aufwendige, aber sehr gute analytische Beschreibung der Hystereseeigenschaft des Filzes wird in [28] aufgezeigt. Die Nichtlinearität soll durch eine allgemeine Potenzfunktion entsprechend (69) dargestellt werden.

Nun gilt es, die Zeitabhängigkeit des Materials zu beschreiben. Dazu definieren wir eine Relaxationsfunktion, welche prinzipiell mit Hilfe von Experimenten gefunden werden muß. Für den Filz eignet sich folgende Exponentialfunktion:

Die Federkonstante des Materials kann mit Hilfe dieser Funktion als Operator dargestellt werden.

Für die Abhängigkeit der Kraft von der Kompression gilt allgemein:

Y sei eine beliebige Konstante mit der Einheit [m]. Da sowohl die Kompression des Filzes, als auch die Federkonstante zeitabhängige Größen sind, muß die Verknüpfung dieser beiden Funktionen durch die Faltung geschehen. Die korrekte Bestimmungsgleichung für die Kraft lautet somit:

Mit Hilfe des Faltungsintegrals

kann die Bestimmungsgleichung für die Kraft in vollständiger Form geschrieben werden. Die Konstanten Y und C_0 sind zur Kraft F_0 zusammengefaßt.

Für die Simulation kann wieder die Differentialgleichung (Formel 66), welche weiterhin ihre Gültigkeit behält, verwendet werden. [28] hat im Laufe seiner Arbeit eine Vielzahl von Iterationen durchgeführt und auf diese Weise jene Werte für F_0 , p , τ_0 , ε und V ermittelt, mit welchen die beste Übereinstimmung mit den Meßwerten erzielt werden konnte. Es standen Meßergebnisse von Hämmern für drei Tasten (A0, A3, A6) in je drei Härtegraden zur Verfügung. Die gefundenen Parameter sind in Tabelle 2 aufgelistet. Die Abbildungen 17 bis 19 zeigen die Ergebnisse der Simulationen, welche sehr gut mit den Meßwerten übereinstimmen.

		A0			A3			A6		
	hart	mittel	weich	hart	mittel	weich	hart	mittel	weich	
m [g]	13.0	13.0	13.0	10.6	10.6	10.6	8.2	8.2	8.2	
F_0 [kN]	2.54	1.85	0.756	7.37	2.82	0.857	16.23	14.12	13.23	
p	2.87	2.95	2.80	3.40	3.30	2.81	3.15	3.12	3.33	
τ_0 [μ s]	10.5	11.5	17.0	5.5	7.0	10.0	1.9	2.1	2.0	
ε [s]	0.947	0.947	0.940	0.968	0.956	0.938	0.981	0.985	0.985	
V[m/s]	1.25	1.31	1.52	1.25	1.36	1.60	1.35	1.47	1.47	

Tabelle 2

hart mittel weich

Abbildung 17:
Kraftverlauf beim Aufschlag des Hammers der Taste 1 (Subkontra A) in drei

verschiedenen Härtegraden.

hart mittel weich

Abbildung 18: Kraftverlauf beim Aufschlag des Hammers der Taste 37 (a) in drei verschiedenen Härtegraden.

Abbildung 19: Kraftverlauf beim Aufschlag des Hammers der Taste 73 (a'') in drei verschiedenen Härtegraden.

3 Interaktion zwischen Hammer und Saite

Der Kontakt des Hammers mit der Saite ist stark durch die Nichtlinearität des Filzes geprägt. Weitere Einflüsse, wie etwa die Resonanz des Hammerstieles, erschweren eine analytische Beschreibung dieses Vorganges. Im Gegensatz zum Aufschlag auf eine harte Fläche, wie unter 2.2 beschrieben, führt die Saite während des Anschlages eine Bewegung aus. Die Wellenfront wird an den Enden der Saite reflektiert, und es entsteht eine zusätzliche Reaktionskraft auf den Hammer. Diese Kraft bewirkt, daß der Hammer von der Saite weggeschleudert wird. Würde der Hammer auf eine unendliche Saite schlagen (Bis zum Zeitpunkt der ersten Reflexion kann der Hammer nicht zwischen einer begrenzten und unendlichen Saite unterscheiden. Er "sieht" nur die Impedanz R_0 der Saite.), würde diese ein bestimmtes Stück ausgelenkt werden, und der Hammer müßte mit Hilfe der Schwerkraft die Saite verlassen. Der bei einer realen Saite von der reflektierten Welle verursachte Kraftimpuls löst selbst wieder eine neue Welle aus. Der zeitliche Verlauf der Kontaktkraft kann dadurch eine starke Welligkeit aufweisen. In Ausnahmefällen können auch Mehrfachkontakte auftreten. Diese können entstehen, wenn eine starke, reflektierte Welle einen weiteren Kontakt verursacht, kurz nachdem der Hammer die Saite verlassen hat.

Der genaue Ablauf des Anschlagvorganges hängt sehr stark vom Masseverhältnis zwischen Hammer und Saite ab. Dieses ist vom Baß zum Diskant sehr unterschiedlich.

Für die tiefsten Saiten hat der Hammer eine sehr geringe Masse. Im Diskant sind die Verhältnisse umgekehrt.

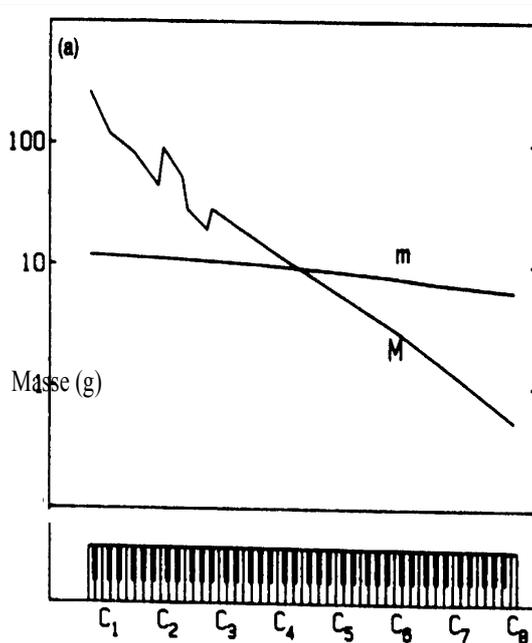


Abbildung 20 [12]: M = Masse der Saiten, m = Masse der Hämmer

Bei den kurzen Saiten im Diskant haben auch die Reflexionen vom Steg eine Bedeutung für den Anschlag. Da der Hammer durch jeden Kraftimpuls eine gewisse Geschwindigkeit und damit verbunden kinetische Energie erhält, wirken sich diese Reflexionen negativ auf den Energietransfer vom Hammer zur Saite aus. Durch die Hysterese geht noch zusätzliche Energie verloren.

Da eine vollständige analytische Beschreibung nicht möglich ist, möchte ich [8],[9],[10] folgend bei einem sehr

einfachen Modell beginnen.

1 Analytische Lösung für sehr leichte, harte, punktförmige Hämmer

Gegeben ist eine in den Endpunkten fest eingespannte, völlig flexible Saite. Der Anschlag erfolgt an der Stelle $x=\alpha \cdot L$. Da es sich um einen leichten, sehr schmalen Hammer handelt, soll die Anfangsgeschwindigkeit der Saite als Deltafunktion dargestellt werden.

Die Konstante U ist ein Maß für die Stärke des Impulses. Die Anfangsbedingung für die Auslenkung lautet:

Die Lösung der Saitenschwingungsgleichung (9) führt mit Hilfe der in Kapitel 2.1.2.3 angeführten Methode auf folgendes Ergebnis [8]:

mit

Die Energie der einzelnen Moden kann nun in folgender Form angegeben werden:

Dieses Spektrum zeigt, abgesehen vom oszillierenden Sinusterm, keine Abhängigkeit der Energie von der Frequenz. Ohne eine Begrenzung der Frequenz würde die Summe also unendlich sein. Eine einfache Einschränkung von (83) kann durch die Tatsache getroffen werden, daß der Hammer in der Realität eine endliche Breite b besitzt. Es kann angenommen werden, daß Frequenzen, deren halbe Wellenlänge kleiner als b ist, nicht angeregt werden. Das Spektrum fällt ab dieser Frequenz stark ab. Die Annahme des unendlich schmalen und leichten Hammers liefert daher kein realistisches Ergebnis.

2 Allgemeine Lösung für einen harten, schmalen Hammer

Mit der Annahme einer endlichen Hammerbreite kann man die Konstante U als Produkt von b und V angeben. Der Grenzübergang von b gegen null führt auf eine unendliche Geschwindigkeit, wenn U konstant gehalten wird. Es wird also ein kleines Stück der Saite in Bewegung versetzt. Der Impuls I_0 , welchem die Saite ausgesetzt wird, kann folgend angegeben werden:

Nun muß im Gegensatz zu 2.3.1 berücksichtigt werden, daß der Hammer die Saite nicht sofort verläßt, sondern eine gewisse Zeit mit ihr in Kontakt bleibt. Wie in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, sind die reflektierten Wellen für den Kontaktverlust des Hammers verantwortlich. Die Zeit t_a , nach der die erste Reflexion eintrifft, kann sehr leicht angegeben werden.

Vor dem Eintreffen der ersten Reflexion wird der Hammer durch die Impedanz der Saite gebremst. Wie schnell dieser Vorgang abläuft, hängt im Prinzip vom Verhältnis der Massen von Hammer und Saite ab. Im Augenblick des Anschlages wird das Masseelement $b \cdot \mu$ der Saite in Bewegung versetzt. Diese Auslenkung wandert mit der transversalen Ausbreitungsgeschwindigkeit c in beide Richtungen entlang der Saite. Für den Hammer bedeutet das, daß er im Zuge des Anschlages ein immer längeres Stück der Saite in Bewegung versetzen muß. Das Verhältnis der Massen von Hammer und Saite unterliegt somit einer zeitlichen Veränderung. Daraus ergibt sich folgende Dämpfungskonstante:

Zur analytischen Beschreibung dieses Vorganges können folgende Gleichungen herangezogen werden. Die Wellengleichung (9) behält, abgesehen vom Ort des Anschlages, weiterhin ihre Gültigkeit. Für den Anschlagpunkt kann das folgende Kräftegleichgewicht angegeben werden.

Das aus (9) und (87) entstehende Gleichungssystem kann analytisch gelöst werden [9]. Betrachten wir die erste durch den Kontaktimpuls erzeugte Welle, welche mit dem Index "0" gekennzeichnet wird.

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit:

Wenn die Geschwindigkeit bekannt ist, kann die Kraft mit Hilfe von (87) direkt angegeben werden. Der Faktor 2 kommt durch die Ausbreitung der Welle in beide Richtungen zustande.

Bei der Reflexion der Welle am Ende der Saite tritt eine Änderung des Vorzeichens auf. Diese Welle $-g_0$ übt eine Kraft auf den Hammer aus, und löst eine neue Welle g_1 aus. Dieser Vorgang wiederholt sich so lange, bis der Hammer die Saite verläßt.

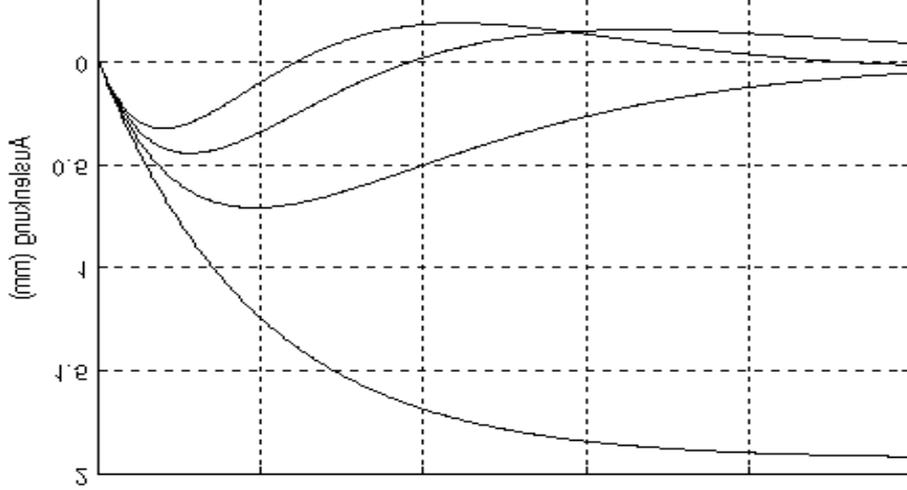
Für die weiteren Betrachtungen soll der Anschlagpunkt mit $x=0$ festgelegt werden. Eine allgemeine Formel für die Auslenkung der Saite kann angegeben werden, wenn man annimmt, daß eine von links nach rechts laufende Welle $-g_n$ eine neue, in beide Richtungen laufende g_{n+1} auslöst.

Der von (87) abgeleitete Zusammenhang führt auf:

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

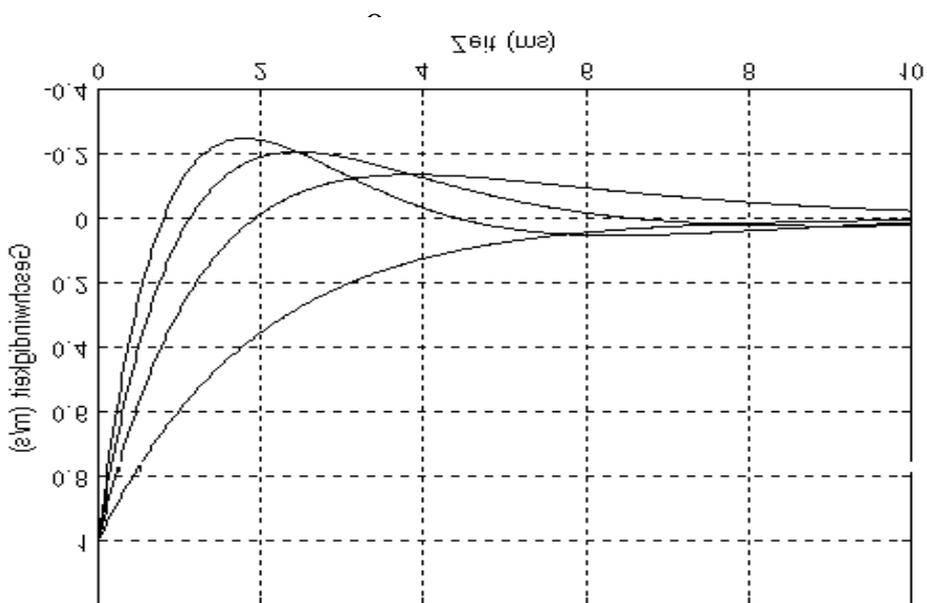
Wendet man dieses Integral auf (88) an, erhält man den Geschwindigkeitsverlauf der neu entstandenen Welle g_1 .

Der Zeitpunkt $t=0$ ist jener, bei dem der Hammer die Saite anschlägt.



ung am

3 in den



=0) und

$n=0$

1

2

3

Abbildung 22: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit der Saite für die erste Welle ($n=0$)

und für drei weitere Reflexionen ($n=1-3$).

Es fällt auf, daß nur g_0 eine bleibende Auslenkung verursacht. Alle Anteile mit Index $n > 0$ gehen gegen null, wenn t gegen unendlich geht.

Bei der Geschwindigkeit wird die negative Anfangssteigung mit zunehmendem Index n größer. Die Nulldurchgänge der einzelnen Funktionen wechseln sich ab.

Die obigen Funktionen sind so dargestellt, daß bei jedem Eintreffen einer Reflexion die Zeit bei $t=0$ beginnt. In Wirklichkeit treffen sie jedoch im Abstand von t_a ein. Berücksichtigt man diese Zeitverschiebung, dann lautet der zeitliche Verlauf der Kontaktkraft in korrekter Schreibweise:

Einen weiteren interessanten Aspekt bringt die Betrachtung der Impulse I_n der einzelnen Anteile.

Wenn t unendlich gewählt wird, ergibt sich für den ersten Anteil (Index $n=0$) ein Impuls von $-mV$. Für alle anderen ($n > 0$) ist dieser null. Der Impuls mV entspricht dem Anfangsimpuls des Hammers und reicht gerade aus, um ihn zu stoppen. Das heißt, daß ein negativer Gesamtimpuls, welcher in der Lage ist, den Hammer von der Saite wegzubewegen, nur durch eine endliche Kontaktzeit τ gewährleistet werden kann. Wenn der Hammer im Verhältnis zur Saite so leicht ist, daß er diese in einer Zeit $\tau < 2 \cdot t_a$ verläßt, kann eine geschlossene Formel für die Kontaktzeit angegeben werden.

Wenn mehr als zwei Reflexionen oder auch welche vom Steg auftreten, kann der erste Nulldurchgang der Kraft (=Kontaktverlust) nur durch numerische oder grafische Methoden bestimmt werden. Soll der Anschlagvorgang auch auf die Möglichkeit eines oder mehrerer Wiederkontakte untersucht werden, so muß mit zwei verschiedenen Modellen gerechnet werden. Da der Hammer und die Saite nicht fest miteinander verbunden sind, kann es keine negative Kraft geben. Sobald die Kraft kleiner null wird, gilt für die gesamte Saite die Differentialgleichung (9), und der Hammer bewegt sich mit seiner momentanen Geschwindigkeit weiter. Diese Überlegungen gelten natürlich auch für alle späteren Simulationen.

3 Allgemeine Lösung für einen weichen, schmalen Hammer

Die in den vorhergehenden Punkten angegebenen Systeme sind zwar analytisch beschreibbar, aber sie liefern keine mit Messungen an einem realen Instrument vergleichbaren Ergebnisse. Eine Ausnahme bilden die tiefsten Töne, bei denen der Hammer sehr leicht im Verhältnis zur Saite ist.

Es ist aus diesem Grund notwendig, eine weitere Eigenschaft des Hammers, nämlich die Federkonstante C des Filzes, in die Berechnungen miteinzubeziehen. Es handelt sich in diesem Fall jedoch um eine lineare Feder. Die Skalierung der Ortsvariablen geschieht wieder so, daß der Anschlag an der Position $x=0$ stattfindet. Die Federkraft, welche sowohl auf die Masse des Hammers als auch auf die Saite wirkt, kann mit folgender Formel angegeben werden:

Im Gegensatz zum Aufschlag auf eine harte Fläche muß nun auch die Bewegung der Saite am Anschlagpunkt berücksichtigt werden. Es muß zwischen der Bewegung des Hammers und der Eindrückung des Filzes unterschieden werden.

Die Bewegungsgleichung für den Hammer lautet:

Für das Kräftegleichgewicht am Kontaktpunkt der Saite gilt:

Die effektive Auslenkung der Saite wird durch die Überlagerung aller wandernden Wellenfronten gebildet. Jede am Kontaktpunkt vorbeilaufende Welle $k(t)$ generiert eine neue Welle $g(t)$ (siehe 2.3.2).

Für die Kraft $F(t)$ gilt weiters der bekannte Zusammenhang:

Die Bewegung des Hammers ergibt sich aus:

Wenn die Beziehungen für $F(t)$ und $h(t)$ in die Bewegungsgleichung des Hammers (104) eingesetzt werden, erhält man folgende Differentialgleichung:

Die Definition der Größen,

führt auf eine sehr anschauliche Gleichung:

Ω stellt dabei die Eigenfrequenz des Systems aus Hammermasse und Feder dar. β ist als Dämpfungskonstante zu verstehen, welche ein Maß für den Energieverlust der Feder an die Saite darstellt.

Die Form dieser Differentialgleichung ist bekannt und mathematisch mit der eines fremderregten, gedämpften, harmonischen Oszillators äquivalent [10]. Lösungsmethoden für ein solches System sind bekannt, und können auf den Fall der Interaktion zwischen Hammer und Saite angewendet werden.

Betrachten wir wieder die erste entstehende Welle. Die Funktion $k(t)$ ist für diesen Fall null, und die Anfangsbedingungen lauten:

Die Lösung für die Geschwindigkeit kann nun folgend angegeben werden:

Man kann anhand von δ erkennen, daß die Lösung in Abhängigkeit der Federkonstante C reell oder komplex werden kann. Der Wert von C , für welchen sich $\delta=0$ ergibt, soll als kritische Federkonstante C_0 bezeichnet werden.

Reelle Lösungen ergeben sich, wenn die Federkonstante $C > C_0$ ist. Diese Bedingung ist bei realen Instrumenten in fast allen Fällen erfüllt.

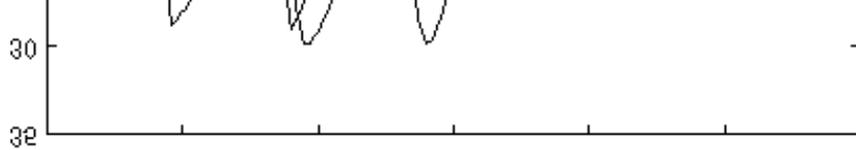
Zum Zeitpunkt t_a trifft die erste Reflexion $k(t)$ vom kurzen Ende ein.

Diese löst eine neue Welle g_1 aus:

Unter dem Aspekt, daß jede reflektierte Welle sich nur durch das Vorzeichen von der weglaufernden unterscheidet (siehe 114), kann die Differentialgleichung (110) in folgender Form geschrieben werden:

Zur Lösung jeder neu erzeugten Welle g_{n+1} bedarf es der Integration dieser Gleichung.

Die Abbildung 23 zeigt den zeitlichen Verlauf der Kraft am Ort des Anschlages in Abhängigkeit von verschiedenen Federkonstanten C . Das entsprechende Simulink-Modell ist STRIKE4.MDL.



1

2

3

Abbildung 23: Zeitlicher Verlauf der Kraft beim Anschlag der c' Taste. $C=1 \cdot 10^6$ N/m (1), $C=3 \cdot 10^5$ N/m (2) und $C=1 \cdot 10^5$ N/m (3).

4 Numerische Lösung der Interaktion

Eine analytische Lösung, wie oben aufgezeigt, wird auch bei einem einfachen Ansatz des Problems sehr schnell unüberschaubar und kompliziert. Ich möchte daher auf die vorangegangenen Kapitel aufbauend ein effizientes Modell der Interaktion vorstellen, mit welchem sehr gut die Nichtlinearität der Federkonstante und die Hystereseeigenschaft des Filzes berücksichtigt werden können. Die Grundlage dazu bilden die Bewegungsgleichung des Hammers (Formel 66) und ein Wellenleitermodell der Saite. An dieser Stelle sei erwähnt, daß hier ein Vorgriff auf Kapitel 3.2.1.1 gemacht wird, in welchem eine Herleitung dieses Modells erfolgt.

Der obere Teil von Abbildung 24 stellt das Modell der Saite mit den entsprechenden Verzögerungsgliedern für die vor- und rücklaufende Welle dar (vergleiche Abbildung 38 3.2.1.1). Die physikalische Ausgangsgröße (Geschwindigkeit der Saite am Ort des Anschlages) wird durch den Block Sum4 gebildet.

Der untere Teil im Blockschaltbild ist die Implementation der Bewegungsgleichung des Hammers. Der Block $F(p)$ enthält den Zusammenhang zwischen der Eindrückung des Filzes und der Federkraft. Die Beziehung für die Kraft kann eine beliebige mathematische Funktion sein (siehe 69, 70, 78), kann aber auch aus einer Tabelle, welche mit der Eindrückung des Filzes indiziert wird, ausgelesen werden.

Die Verbindung der beiden Teile erfolgt durch das Kräftegleichgewicht zwischen der Feder und der Reaktionskraft der Saite. Die Saitengeschwindigkeit wird durch die bereits bekannte Formel 90 berechnet (Block 1/2R). Hier werden die physikalisch relevanten Eigenschaften der unbegrenzten Saite durch ihre Wellenimpedanz berücksichtigt. Das Verhalten der begrenzten Saite wird durch die Verzögerungsglieder simuliert.

Schließlich wird noch die Auslenkung der Saite am Anschlagpunkt benötigt, um die Eindrückung des Filzes berechnen zu können (Blöcke y und Sum1):

und

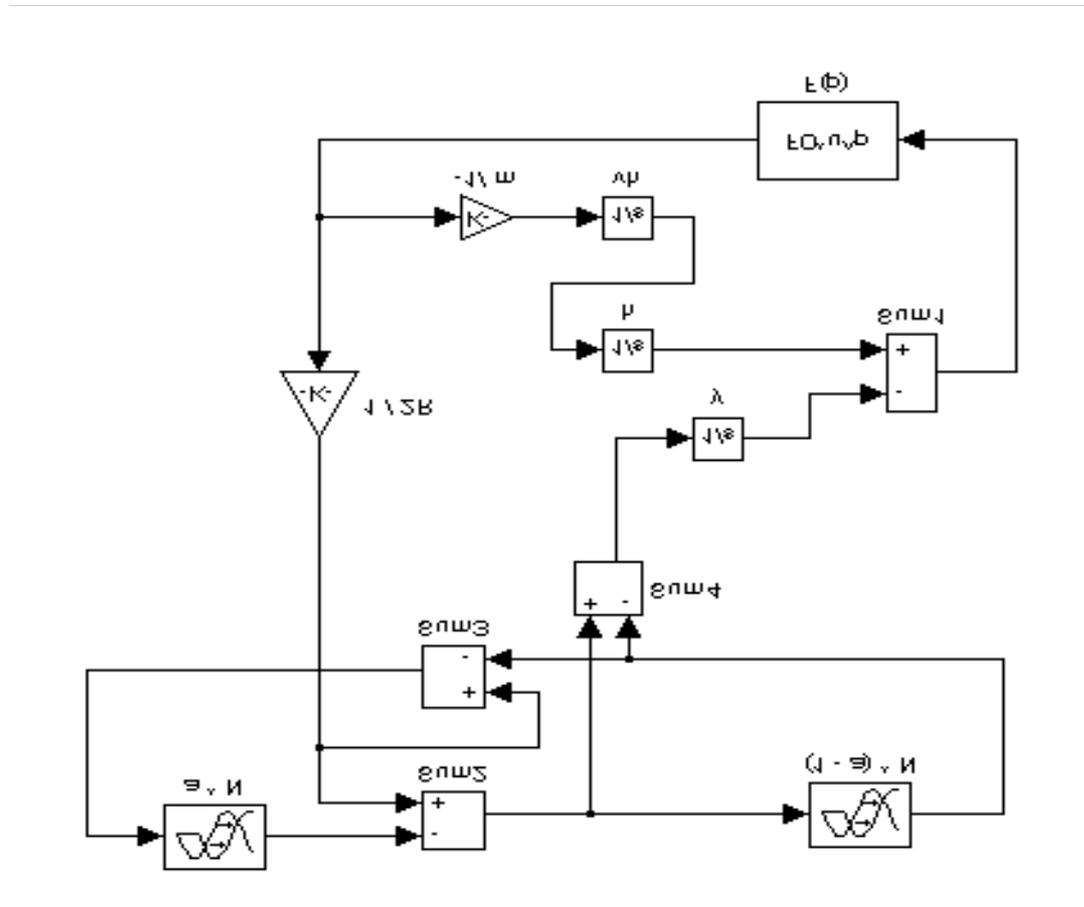


Abbildung 24: Simulink Koppelplan des oben beschriebenen Systems

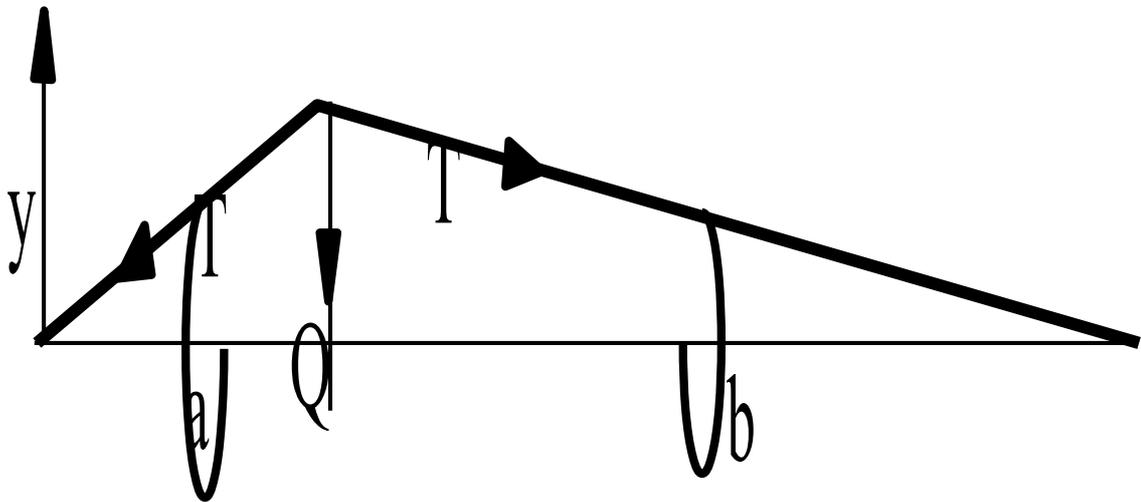
Wenn man das Modell der Saite mit den entsprechenden Filtern (Inharmonizität, Verluste - siehe Kapitel 4.2.1) ergänzt, kann auch die Auswirkung dieser Faktoren auf die Interaktion berücksichtigt werden. Die so erhaltenen Ergebnisse stimmen sehr gut mit den von anderen Autoren [13],[23],[24] durchgeführten Simulationen überein.

Dieses Modell ermöglicht auch Untersuchungen, wie zum Beispiel der Abhängigkeit des Wirkungsgrades beim Anschlag von der Anschlagstärke und des Anschlagpunktes. Auch Experimente mit Parametern, welche nicht der Realität des Klaviers entsprechen, liefern interessante Ergebnisse.

5 Alternative Möglichkeiten zur Beschreibung der Interaktion

1 Modell "Pfeil und Bogen"

Bei den sehr hohen Tönen kann die Kontaktzeit während des Anschlages mehrere Perioden der Grundfrequenz betragen. Es muß bei der Simulation eine Unmenge von Reflexionen von der Agraffe und vom Steg, welche sich gegenseitig überlagern, berücksichtigt werden. Dieses Problem kann durch ein einfacheres Modell der Saite



wesentlich vereinfacht werden. Die Saite wird durch zwei gerade Stücke (ähnlich der gespannten Sehne eines Bogens) dargestellt. Die Bewegungsgleichung entspricht nun nicht mehr (9), sondern ist ein einfaches Masse-Feder System [28]. Es gilt den Zusammenhang zwischen der Kraft und der Auslenkung der Saite zu finden. Abbildung 25 zeigt das Modell mit den entsprechenden Bezeichnungen.

Abbildung 25

Die Rückstellkraft Q ist am Ort der Auslenkung:

Für kleine Winkel gilt:

In (120) eingesetzt, ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Auslenkung und Rückstellkraft:

Als nächstes wird die Trägheitskraft der nicht masselosen Saite berücksichtigt. Da die Saite in den Endpunkten in Ruhe ist, wird nur die halbe Gesamtmasse M der Saite bewegt. Die Bewegungsgleichung für die Saite lautet unter Berücksichtigung einer am Anschlagpunkt wirkenden Federkraft F des Hammers:

Die Bewegungsgleichung für den Hammer bleibt unverändert und entspricht (104). Die Kraft F kann auch bei diesem Modell eine beliebige Funktion der Eindrückung des Filzes sein.

Die beiden Bewegungsgleichungen für den Hammer und die Saite können durch die Kraft F , welche auf jeder Seite des Filzes dieselbe ist, miteinander verknüpft werden.

Dieses mechanische System ist im Simulink-Modell STRIKE5.MDL implementiert. Die Eingabe der passenden Parameter (Tabelle 2) ermöglicht die Simulation für verschiedene Hämmer und Saiten.

Das Prinzip der wandernden Welle wird bei dieser Art der Berechnung nicht angewendet. Es ist daher zu beachten, daß nur für mittlere und hohe Töne ein brauchbares Ergebnis erzielt werden kann.

2 Beschreibung der Interaktion mit elektromechanischen Analogien

Die Möglichkeit der Beschreibung eines elektrischen Systems mit Hilfe von elektromechanischen Analogien kann gute Ergebnisse liefern, da viele effiziente Methoden zur Berechnung von elektrischen Netzwerken bekannt sind.

Bei der von [13] vorgestellten Methode wird das mechanische System des Hammers (Abbildung 12) durch eine elektrische Ersatzschaltung dargestellt. Die Anordnung der Masse und der Feder führt auf eine Parallelschaltung einer Spule mit dem Induktivitätswert m (M_h) und einem Kondensator mit der Kapazität C (Ch).

Um eine Ersatzschaltung für das gesamte System zu finden, betrachten wir die Saitenschwingungsgleichung für den Fall einer sinusförmigen externen Kraft F am Anschlagpunkt $x=\alpha$. Die Differentialgleichung für die Auslenkung $y(x)$ lautet unter dieser Bedingung:

Der Diracimpuls am Ort $x=\alpha$ bedeutet, daß die Kraft nur in diesem Punkt wirksam ist. Die Zeitabhängigkeit ist hier nicht explizit angeführt, da es sich ausschließlich um harmonische Vorgänge handelt. Die Lösung kann mit Hilfe der Randbedingung $y(0)=y(L)=0$ als Summe der einzelnen Eigenfunktionen angegeben werden [13].

Es kann gezeigt werden, daß die Eingangsimpedanz der Saite für den n -ten Mode dieselbe ist, wie für ein Masse-Feder System mit der Masse: und der Federkonstante

Die Kreisfrequenzen für die einzelnen Moden lauten für eine flexible Saite

Die gesamte Eingangsimpedanz der Saite kann nun als Parallelschaltung von unendlich vielen Resonanzkreisen der Massen M_n und der Federn C_n gesehen werden. Geht man nach der FU-Analogie (Kraft-Spannung) vor, erhält man eine Parallelschaltung von Reihenresonanzkreisen. Die Massen werden zu Induktivitäten, und die Federkonstanten stellen die Kondensatoren dar. Die Kraft entspricht definitionsgemäß der Spannung und die Auslenkung der Ladung. Die Anfangsgeschwindigkeit V des Hammers wird durch den Strom der Spule M_h vorgegeben. Verluste können mit Hilfe von Widerständen R_n miteinbezogen werden, und man erhält das in Abbildung 26 dargestellte Ersatzschaltbild.

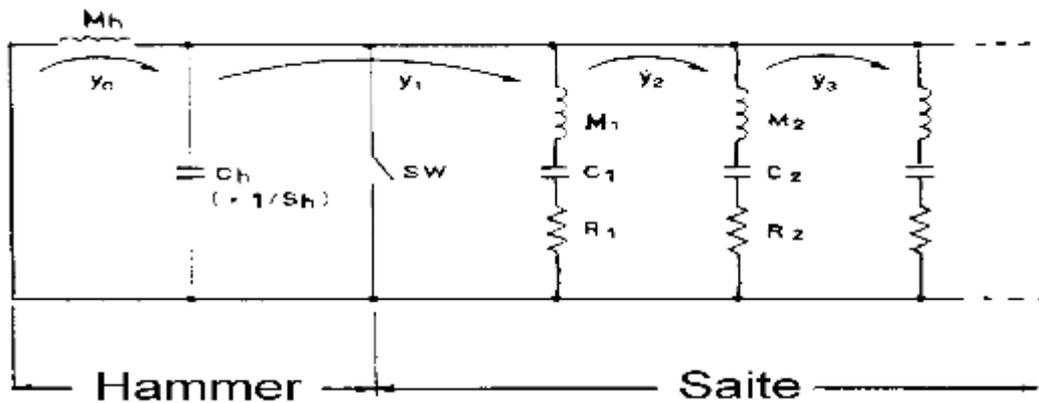


Abbildung 26 [13]: Elektrisches Ersatzschaltbild der Interaktion

Erwähnt sei, daß in der Simulation natürlich nicht unendlich viele Resonanzkreise verwendet werden können. [13] hat im Laufe seiner Experimente festgestellt, daß sich ab einer Anzahl von etwa 50 Elementen (~ 50 Teiltönen) die Ergebnisse kaum voneinander unterscheiden.

Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes ist, daß die Biegesteifigkeit der Saite in die Berechnungen miteinbezogen werden kann. Wenn die Inharmonizität der einzelnen Moden bekannt ist, kann damit die Federkonstante, respektive die Kapazität, mit einem entsprechenden Faktor korrigiert werden:

Der Schalter im Ersatzschaltbild bestimmt den Kontaktzeitpunkt des Hammers mit der Saite. Bei geschlossenem Schalter fließt der Strom "V" im Kreis. Der Kondensator C_h sowie der Rest des Netzwerkes sind kurzgeschlossen. Das Öffnen des Schalters bewirkt eine Aufladung des Kondensators C_h (entspricht einer Eindrückung des Filzes), und die dadurch entstehende Spannung (\sim Kraft) treibt Ströme durch die einzelnen Resonanzkreise. Die Summe dieser Ströme entspricht der Geschwindigkeit der Saite am Kontaktpunkt. Die Nichtlinearität des Filzes kann in die Berechnungen miteinbezogen werden, indem man die Federkonstante in Abhängigkeit der Eindrückung des Filzes ändert. [13] hat für seine Simulationen das von ihm vorgeschlagene Polynom (Formel 70) verwendet.

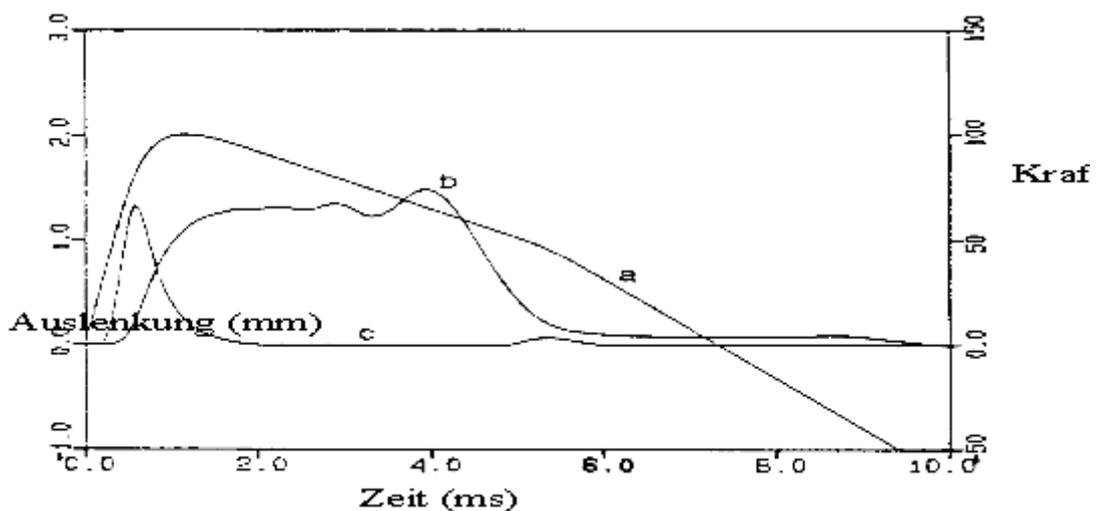


Abbildung 27 [13]: Ergebnis einer Simulation des Anschlages der Subkontra A Taste. a = Auslenkung des Hammers, b = Auslenkung der Saite, c = zeitl. Verlauf der Kontaktkraft.

Die Welligkeit im Verlauf der Saitenbewegung ist auf die Dispersion zurückzuführen. Es zeigt sich auch eine bessere Übereinstimmung mit dem realen Klangspektrum, wenn die Inharmonizität berücksichtigt wird [13].

6 Der Anschlag des Pianisten

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, welchen Einfluß der Pianist auf den Klangcharakter seines Instrumentes hat. Vergleichbare Ergebnisse können natürlich nur dann erzielt werden, wenn der Pianist in der Lage ist, durch verschiedene Anschlagarten einen unterschiedlichen Verlauf der Tastengeschwindigkeit zu erreichen, ohne dabei die Endgeschwindigkeit des frei fliegenden Hammers zu verändern. Bei solchen Experimenten [1] gibt es meist eine unterschiedliche Gewichtung der Bedeutung des Anschlages, wird dieser doch häufig als Maß für einen guten Pianisten angeführt. Hier sei jedoch erwähnt, daß in der Sprache des Musikers weit mehr mit dem Begriff des Anschlages gemeint ist, als nur der zeitliche Verlauf der Tastengeschwindigkeit. Messungen, aber auch gehörmäßige Beurteilungen von Klängen, welche sich nur durch die Art des Drückens der Taste unterscheiden, ergeben lediglich geringe Unterschiede. Die Spektren der frei schwingenden Saite unterscheiden sich erwartungsgemäß nicht voneinander. Während des Anschlages entstehen jedoch auch Geräusche durch das Aufschlagen der Taste auf das Tastenbett. Die unterschiedlichen Kräfte in der gesamten Hammermechanik verursachen ebenfalls Vibrationen, welche sich auf deren Befestigung übertragen. Diese Einflüsse sind meßbar und können nach einer gewissen Sensibilisierung auch gut wahrgenommen werden.

1.4 Resonanzboden, Steg und Korpus

1.4.1 Einleitung

Da die frei schwingende Saite alleine fast keinen Schall in die Umgebung abstrahlen kann, muß die Energie in den Resonanzboden übertragen werden. Der Steg bildet die wichtige Verbindung zwischen Saiten und Resonanzboden sowie für die Saiten untereinander. Die Eigenschaft des Steges läßt sich sehr gut mit der mechanischen Impedanz beschreiben. Im Fall des Klaviers würde man im elektrotechnischen Sinne von einer Fehlanpassung zwischen Saiten und Resonanzboden sprechen. Wäre Anpassung vorhanden, hätte das jedoch fatale Auswirkungen auf den Klang. Der Energieimpuls, den die Saite durch den Hammer erhält, würde sofort in den Resonanzboden geleitet werden. Dies führte zu einem sehr lauten, aber kurzen Ton. Für den Fall einer unendlichen Impedanz würde die Saite -abgesehen von inneren Verlusten- zwar ewig schwingen, jedoch könnte keine Energie in den Resonanzboden transportiert werden. Die Wichtigkeit der richtigen Anpassung liegt somit klar auf der Hand.

1.4.2 Aufbau des Resonanzbodens

Bei einem modernen Konzertflügel hat der Resonanzboden eine Dicke von 6-10mm. Die Grundplatte wird aus 5 bis 15cm breiten, verleimten Weichholzbrettern gebildet. Die bevorzugten Sorten sind "Picea sitchensis" und "Picea rubens". Das getrocknete Holz hat etwa eine Dichte von 0.4 g/cm^3 und einen Elastizitätsmodul von $12-13 \text{ GN/m}^2$ in Richtung der Maserung. Normal dazu ist er näherungsweise um den Faktor 50 kleiner, unterliegt jedoch einer beträchtlichen Streuung.

Normal zur Maserung sind in einem Abstand von 10-15cm Verstärkungsrippen angebracht, welche dem Resonanzboden auch in diese Richtung eine entsprechende Steifigkeit verleihen. Trotzdem kann dieser nicht als eine isotrope Platte aufgefaßt werden. Die Richtung der Maserung hat eine Auswirkung auf den Klang und muß beim Einbau berücksichtigt werden. Für gewöhnlich schließt die Maserung einen Winkel von $30-50^\circ$ mit der geraden Seite des Gehäuses ein und verläuft etwa parallel zum Diskantsteg. Das Gewicht des Resonanzbodens beträgt bei einem Konzertflügel 10-13kg.

Bei Instrumenten der unteren Preisklasse wird anstelle von Massivholz oft mehrfach verleimtes Sperrholz verwendet, oder es wird nur die äußere Schicht aus hochwertigem, der Kern jedoch aus einem anderen Holz gefertigt. Bei diesen Konstruktionen sind die Qualität und Aufbereitung des Holzes nicht von so großer Bedeutung wie bei den hochwertigen Vollholzkonstruktionen. Klanglich werden diese Instrumente jedoch meist als etwas baßschwach beschrieben.

Der Resonanzboden wird bei der Herstellung mit einer leichten Wölbung versehen, welche auch als "Krone" bezeichnet wird. Ihr Radius beträgt 15-50m und wird durch die Normalkraft der Saiten, welche 0.5 bis 3% der Spannung aufweist, kompensiert. Nach dem vollständigen Aufbau des Instrumentes sollte eine völlig ebene Fläche entstehen.

Das Holz hat eine hygroskopische Eigenschaft und ändert somit in Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit der Umgebung seinen relativen Feuchtigkeitsgehalt. Das bewirkt eine Veränderung der Abmessungen und des Gewichtes des Resonanzbodens. Die Ausdehnung erfolgt vor allem normal zur Maserung. In Richtung der Maserung gibt es kaum eine Veränderung.

Eine höhere Feuchtigkeit bewirkt eine stärkere Wölbung der Krone, und üblicherweise wird das Instrument dadurch etwas höher. Abnehmende Luftfeuchtigkeit hat einen gegenteiligen Effekt zur Folge. Eine entsprechende Lackierung soll den Übergang der Feuchtigkeit von der Luft in das Holz verlangsamen. Stimmung und Klangcharakter werden dadurch bei kurzzeitigen Klimaveränderungen stabil gehalten. Auswirkungen der Lackierung auf den Klang sind nicht bekannt. Ein ständiger Wechsel der äußeren Bedingungen kann das Instrument nachhaltig schädigen und sollte deshalb vermieden werden.

Diese genannten Nachteile des Holzes haben immer wieder Entwicklungen mit alternativen Materialien hervorgebracht. Vor allem verschiedene Metalle, aber auch Metall-Kunststoff-Kombinationen wurden erprobt. Einige dieser Konstruktionen hatten zwar einen interessanten Klang, konnten jedoch keine Alternative zu konventionell gefertigten Klavieren darstellen.

1.4.3 Der Steg

Der Steg bestimmt den Ort der Koppelung der jeweiligen Saiten mit dem Resonanzboden. Als Material wird meist Hartholz der Sorten Ahorn oder Buche verwendet, welches imstande ist, der Kraft der Saiten zu widerstehen [31]. Der Steg besteht aus zwei Teilen und ist fest mit dem Resonanzboden verleimt. Der Diskantsteg hat beim Konzertflügel eine Länge von etwa 2m und verläuft parallel zum geschwungenen Gehäuse. Seine Höhe beträgt 3-4 cm. Unterhalb der E-Taste erfolgt der Übergang zum Baßsteg. Der Grund für die Aufteilung des Steges liegt in einer besseren Anregung der tiefsten Moden im Resonanzboden. Der Baßsteg ist 2-3 cm höher, da die Baßsaiten oberhalb der Diskantsaiten gespannt sind.

1.4.4 Schwingungsverhalten des Resonanzbodens

Eine alte, aber sehr gute Methode zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Platten stellt das Kladnische Klangmuster dar. Bei diesem Verfahren wird etwas Sand oder ein ähnliches feinkörniges Material auf die zu untersuchende Fläche gestreut. Mit einem Frequenzgenerator und einem elektrodynamischen Wandler wird die Platte in Schwingung versetzt. Wenn diese bei einer Eigenresonanz angeregt wird, entsteht eine stehende Welle. Der Sand sammelt sich entlang der Knotenlinien, welche sich nicht bewegen. Man kann auf diese Art und Weise die schwingenden Bereiche bei den verschiedenen Frequenzen sichtbar machen. Abbildung 28 zeigt solche Klangmuster am Resonanzboden eines Konzertflügels. Der Bespannrahmen und der Steg wurden für diese Messungen entfernt.

Abbildung 28 [1]: Kladsche Klangmuster am Resonanzboden. Das dunkle Objekt am linken Rand ist der elektrodynamische Wandler.

Die erste Resonanz ist bei 49 Hertz zu sehen. Unterhalb dieser Frequenz nimmt die akustische Leistung stark ab. Ein weiterer Grund für die niedrige Leistung bei tiefen Frequenzen liegt im Abstrahlverhalten des Resonanzbodens, welcher sich wie ein Dipolstrahler verhält. Für tiefe Frequenzen, deren Wellenlängen im Verhältnis zu den Abmessungen des Instrumentes groß sind, bildet sich ein akustischer Kurzschluß. Wenn sich der Resonanzboden nach oben wölbt und dadurch eine Druckwelle erzeugt, entsteht zur gleichen Zeit ein Sog auf der Unterseite. Der Korpus hat neben seiner stabilisierenden Funktion zusätzlich die Aufgabe, die Bewegung der Luftpartikel von der einen Seite zur anderen zu behindern und dadurch den Wirkungsgrad für tiefe Frequenzen zu erhöhen. Zusammen mit dem Deckel entsteht ein System, welches in seiner Funktion mit dem Gehäuse einer geschlossenen Lautsprecherbox zu vergleichen ist.

Ein ähnlicher Effekt zeigt sich auch bei höheren Moden, wie sie in der Abbildung 28 zu sehen sind. Hier wird die Luft zwar nicht von einer Seite des Resonanzbodens auf die andere verschoben, jedoch führen die einzelnen benachbarten Zonen gegenphasige Bewegungen aus. Es findet wieder ein Luftaustausch statt, welcher nicht zur akustischen Wirkleistung beiträgt.

Eine aus heutiger Sicht sehr interessante Möglichkeit, das Schwingungsverhalten des Resonanzbodens zu beschreiben, bietet die Modalanalyse mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Die große Rechenleistung moderner Computer ermöglicht eine äußerst feine

Diskretisierung der Fläche und kann dadurch exakte Ergebnisse liefern.

1.4.5 Die Impedanz des Steges

Wie in der Einleitung von Kapitel 2.4 erwähnt, läßt sich das Verhalten dieses Systems mit der mechanischen Impedanz beschreiben. Die Messung dieser erfolgt mit Hilfe eines kräftigen elektrodynamischen Wandlers, welcher an einer bestimmten Position am Steg befestigt wird. Die Schwingungen werden direkt an den Steg weitergeleitet. Die Kraft F , welche der Wandler auf den Steg ausübt, muß gemeinsam mit der Geschwindigkeit v des Steges mit geeigneten Aufnehmern gemessen werden. Die Impedanz kann nun für jede Frequenz nach folgender Formel berechnet werden:

$$R_b = \frac{F}{v}$$

Der oft verwendete Begriff der Beweglichkeit ist der Kehrwert der Impedanz und kann mit dem Leitwert im elektrotechnischen Sinne verglichen werden. Abbildung 29 zeigt die Beweglichkeit des Steges eines Kozertflügels am Endpunkt der E-Saiten. Zur besseren Sichtbarkeit ist der Bereich bis 200 Hz im linken Bild gesondert dargestellt. Die Kraft wirkte normal zum Resonanzboden. Die Saiten sind für diese Messung entfernt worden.

Abbildung 29 [31]: Beweglichkeit des Steges im Bereich des Endpunktes der E-Saiten

Die erste ausgeprägte Resonanz bei 49 Hz (siehe Abbildung 28) ist auch bei dieser Messung sehr gut zu erkennen. Auch einige höherfrequente Moden verursachen Maxima im Verlauf der Admittanz. Je größer die Beweglichkeit, desto lauter wird der Ton, da ein schnellerer Energietransfer von der Saite in den Resonanzboden stattfindet.

In Abbildung 30 ist deutlich die Auswirkung der Besaitung auf den Verlauf der

Beweglichkeit zu erkennen. Die erste Resonanz steigt von 49 auf etwa 60 Hz; der Pegel sinkt um mindestens 20 dB. Der gesamte Verlauf wird durch die Saiten flacher. Überstreicht die Beweglichkeit ohne Saiten einen Bereich von 40 dB, so bleiben lediglich 20 dB für den Fall des vollständig arrangierten Instrumentes.

Abbildung 30 [31]: Wie Abbildung 29, jedoch mit Saiten.

Die Tatsache, daß auch longitudinale Saitenschwingungen übertragen werden, macht eine Untersuchung der Impedanz auch in Richtungen notwendig, welche nicht normal zum Resonanzboden sind. Abbildung 31 zeigt das Ergebnis einer Beweglichkeitsmessung in Richtung der Saiten im Bereich der c''' -Saiten (C6). Die Messung erfolgte mit Saiten.

Abbildung 31 [31]: Beweglichkeit des Steges in longitudinaler Richtung

Es fällt auf, daß im Gegensatz zur Messung normal zum Resonanzboden die Beweglichkeit mit der Frequenz zunimmt. Der Pegel ist deutlich niedriger, was bedeutet, daß der Energietransfer in longitudinaler Richtung nicht so effizient ist.

Diese Schwingungen klingen langsamer aus.

Der Steg hat neben seiner Hauptaufgabe, der Verbindung von Saiten und Resonanzboden, auch die Funktion eines Impedanztransformators. Der Steg verleiht dem Resonanzboden eine zusätzliche Festigkeit, welche sich in einem Anstieg der Impedanz äußert. Da diese die Last für die Saiten darstellt, ist sie somit die wichtigste Größe für das Verhalten der Saiten. Daraus wird ersichtlich, daß der Aufbau und die Geometrie wichtige Beiträge zur Erzielung des gewünschten Klanges leisten. Man hat dadurch die Möglichkeit, den Charakter eines Instrumentes gezielt an verschiedene Einsatzbedingungen (Orchester, Kammermusik) anzupassen. Weiters können bekannte Schwächen, wie etwa die stärkere innere Dämpfung einer doppelt umwickelten Saite, zum Teil durch eine höhere Impedanz kompensiert werden.

1.5 Koppelung der Saiten an den Steg und untereinander

Die Saiten werden zwischen je zwei Metallstiften über den Steg geführt. Es entsteht ein Doppelknick, welcher den Energietransport in die Endstücke der Saiten (= der Teil zwischen dem Steg und den Befestigungsstiften) behindern soll. Bei den tiefen Tönen wird dieser Teil noch zusätzlich mit Filz gedämpft, um eventuelle Interferenzen mit dem schwingenden Teil auszuschließen. Im Diskant nimmt man zugunsten einer höheren akustischen Leistung mögliche Störungen in Kauf und verzichtet auf eine Bedämpfung dieses Saitenstückes.

Aus den Abbildungen 29 und 30 ist ersichtlich, daß die Saiten einen beträchtlichen Einfluß auf die Impedanz des Steges haben. Es ist somit verständlich, daß auch die Saiten selbst einer gegenseitigen Beeinflussung unterliegen. Die Auswirkung auf das Ausschwingverhalten soll nun genauer untersucht werden.

1.5.1 Ausschwingverhalten des Klavierklanges

Die Abbildung 4 in 1.3 zeigt einen typischen zeitlichen Verlauf des Spektrums eines Klavierklanges. Der raschere Abfall der höheren Teiltöne kann sehr gut auf das Verhältnis der Impedanzen von Steg und Saite zurückgeführt werden. Der raschere Energietransport von der Saite in den Resonanzboden verkürzt die Dauer der höheren Teiltöne.

1.5.1.1 Unterschiedliche Ausschwingraten des Klavierklanges

Die unterschiedlichen Ausschwingraten stellen ein relativ schwierig zu beschreibendes Phänomen dar.

Ich möchte an dieser Stelle einige Worte zur Empfindung der Lautstärke und der Dauer eines Klanges durch das menschliche Gehör setzen. Aus Versuchen geht hervor, daß vor allem der Anfangspegel die Lautheit eines Klanges bestimmt. Das Ausschwingverhalten hat keinen großen Einfluß. Für die Empfindung der Klangdauer ist der zeitliche Verlauf des Pegels von größerer Bedeutung als die

absolute Klangdauer. Es zeigt sich, daß ein Klang, welcher sich in einem bestimmten Zeitabschnitt des Ausklingens nur langsam ändert, als länger empfunden wird als ein Klang mit gleichmäßig abnehmendem Pegel, auch wenn die absolute Klangdauer dieselbe ist [1],[3].

Das Klavier hat nun die Besonderheit, einen starken Anfangspegel mit einer langsamen Ausschwingrate am Ende des Klanges zu vereinen. Für die Empfindung bedeutet dies ein Optimum an Lautheit und Klangdauer.

Abbildung 32 zeigt den zeitlichen Verlauf des Pegels eines es', mit deutlicher Erkennbarkeit der Änderung der Ausschwingrate nach etwa 4 Sekunden. Bei dieser Messung wurden zwei von den drei Saiten mit Filzstücken gedämpft.

Abbildung 32 [1]: Zeitlicher Pegelverlauf eines es'.

Das Zustandekommen dieser klaviertypischen Eigenschaft hat mehrere Ursachen:

1. Vertikale und horizontale Bewegung der Saiten

In der ersten Phase des Klanges bewegen sich die Saiten aufgrund des Hammerimpulses vorwiegend in einer vertikalen Ebene in bezug auf den Resonanzboden. Der Steg hat in diese Richtung seine größte Beweglichkeit. Schwingungen in der Vertikalebene, wie sie in der Anfangsphase auftreten, werden deshalb am stärksten gedämpft. Mit der Fortdauer des Tones werden die Bewegungen in der Horizontalebene dominant, da diese einer wesentlich schwächeren Dämpfung unterliegen. Die Endphase des Klanges wird deshalb vorwiegend durch diese Schwingungen geprägt.

2. Dynamische Koppelung zwischen den Saiten

Während die in (1.) getroffene Erklärung auch für einen einfach besaiteten Ton zutrifft, kann für Töne mit zwei oder drei Saiten ein zusätzlicher Mechanismus angegeben werden [1]. Betrachten wir zwei identische Saiten, welche am selben Ort des Steges befestigt sind. Schwingen beide in Phase, dann addieren sich die Kräfte, die auf den Steg wirken. Für den gegenphasigen Fall löschen sich die Kräfte in den Endpunkten aus, und der Steg führt keine Bewegung aus. Es ergeben sich also von der Phasenlage abhängige Ausschwingraten.

Die Abbildungen 33 und 34 zeigen das Ergebnis eines Experimentes, welches die obige Annahme bestätigt.

Abbildung 33 [1]: Zeitlicher Pegelverlauf der vertikalen Saitenbewegung des es'. Zwei der drei Saiten wurden bei dieser Messung gedämpft.

Abbildung 34 [1]: Wie Abbildung 33, jedoch wirkte eine weitere Saite als passiver Resonator.

Die Saitenbewegung wurde in diesen Fällen mit einem kapazitiven Aufnehmer, welcher nur die vertikale Bewegung aufnimmt, gemessen. In Abbildung 33 wurde nur eine von drei Saiten angeschlagen. Die beiden anderen wurden mit

Hilfe von Filzstücken gedämpft. Das Ergebnis zeigt erwartungsgemäß einen Verlauf, welcher dem in Abbildung 32 entspricht, wenn man die erste Ausschwingrate fortsetzt. Die horizontale Bewegung wurde nicht erfaßt. Bei der Abbildung 34 wurde ein Filzstück entfernt, sodaß eine zusätzliche Saite als passiver Resonator wirkte. Die deutlich längere Ausschwingzeit kann auf die gegenphasige Bewegung der zweiten Saite zurückgeführt werden. Ein ähnlicher Verlauf ergibt sich auch, wenn beide Saiten angeschlagen werden. In diesem Fall kann noch ein zusätzlicher interessanter Effekt beobachtet werden, wenn man mitten im Ausschwingvorgang eine der beiden Saiten dämpft. Die vertikale Bewegung der anderen fällt erwartungsgemäß rascher ab (entsprechend Abbildung 33). Eine zusätzliche Messung des Luftschalles zeigt zur gleichen Zeit jedoch einen Pegelsprung, da durch den plötzlichen Wegfall der gegenphasigen Bewegung der zweiten Saite eine stärkere Kraft auf den Steg wirkt. Danach klingt der Ton wie gewöhnlich aus.

Die angeführten Erklärungen werfen jedoch beim Versuch einer vollständigen Beschreibung zwei neue Fragen auf:

1. Warum wird bei der gegenphasigen Bewegung überhaupt Energie in den Resonanzboden übertragen?
2. Warum schwingen im Fall, daß beide Saiten mit demselben Hammer angeschlagen werden, die Saiten nicht in Phase mit dem daraus resultierenden raschen Abfall der vertikalen Bewegung?

Die erste Frage kann mit einer nicht identen Position der Saiten am Steg erklärt werden, wodurch sich eine unterschiedliche Koppelung ergibt. Die zweite könnte durch Unregelmäßigkeiten im Hammerkopf beantwortet werden.

Beide Erklärungen beruhen jedoch auf zufälligen Streuungen bei der Herstellung des Instrumentes. Dies würde zu einem zufälligen Auftreten der oben genannten Effekte führen, was nicht der Realität entspricht. Es bedarf offensichtlich einer genaueren Untersuchung des Koppelungsmechanismus durch den Steg.

Für die weiteren Betrachtungen sei vorausgesetzt, daß eine sehr geringe Verstimmung eines Saitenpaares nicht zu der erwarteten Schwebungsfrequenz führt. Die Erklärung dafür ist im Charakter der Impedanz der Saite zu suchen.

Zum besseren Verständnis betrachten wir eine einzelne Saite unter verschiedenen Randbedingungen.

Abbildung 35 [1]: Auswirkung der Begrenzung der Saite auf die Eigenfrequenz.

Der Abschluß mit einer Feder führt zu einer Absenkung der Frequenz, ohne dabei die Schwingung zu dämpfen. Der Knotenpunkt der Saite verschiebt sich nach außen und läßt die Saite länger erscheinen als sie eigentlich ist. Eine Masse am Ende bewirkt hingegen eine Erhöhung der Frequenz. Der Grund dafür ist, daß die Saite an der Masse "ziehen" muß, um deren Bewegungsrichtung zu ändern. Ein resistiver Abschluß führt nur zu einer Dämpfung. Die Frequenz wird nicht verändert.

Um nun die Auswirkung dieser Effekte auf die Koppelung zu beschreiben, müssen wir uns etwas genauer mit der Impedanz der Saite (Kapitel 2.1.2.1 Formel 3) auseinandersetzen. Diese Formel gilt nur für eine unendliche Saite. Bei stehenden Wellen, welche sich bei einer eingespannten Saite mit begrenzter Länge ausbilden, ist die Impedanz in bezug auf den Ort weder reell noch konstant. Es kommt bei jedem Schwingungsknoten zu einer starken Erhöhung. Man muß aus diesem Grund auch die Auswirkung der Impedanz der Saiten auf den Steg berücksichtigen und nicht nur den umgekehrten Fall.

Da die zwei oder drei Saiten einer Taste an fast derselben Position mit dem Steg verbunden sind, ist es für eine der Saiten nicht egal, ob die benachbarten bei genau der Frequenz der genannten Saite eine stehende Welle und somit einen Knoten am Steg bilden. Die Impedanz einer Saite unterliegt in der Nähe eines Knotens einer starken Änderung und beeinflusst dadurch auch die Impedanz des Steges in komplizierter Weise. Es kann in diesem Fall nicht mehr von einer reellen Last R_b , wie unter 2.4.5 erwähnt, für die Saiten gesprochen werden. Die Phasenlage der Impedanz erhält für die Saite mit der höheren Frequenz einen federdominierten Charakter und verringert somit deren Frequenz (siehe Abbildung 35). Für die tiefere der beiden Saiten ist die Last massedominiert. Das führt zu einem Regelprozeß, welcher bei geringer

Verstimmung der einzelnen Saiten nach einer bestimmten Zeit zu einer gemeinsamen Frequenz führt. Bei diesem Vorgang werden auch der Realteil der Impedanz und das oben beschriebene Ausschwingverhalten beeinflusst. Erst bei einer größeren Frequenzdifferenz (ab etwa 0.3 Hertz [1]) kommt es zur erwarteten Schwebung. Die einzelnen Ausschwingraten entsprechen dann jenen von nicht gekoppelten Saiten.

Es kann weiters beobachtet werden, daß der Grad der Verstimmung einen Einfluß auf das Ausschwingverhalten hat. Ein guter Klavierstimmer ist in der Lage, den Zeitpunkt des Überganges von der steilen zur flachen Ausschwingkurve sowie deren Steigungen zu optimieren.

3 Die Modellierung des Computerinstrumentes

Bevor ich genauer auf die Implementation des Klaviers eingehe, möchte ich am Beginn dieses Kapitels einen allgemeinen Teil über die Möglichkeiten des physikalischen Modellierens einbringen.

3.1 Grundlagen physikalischer Modelle

Physikalisches Modellieren ist das Nachbilden eines Systems gemäß seiner physikalischen Beschaffenheit auf der Basis mathematischer Beziehungen. Diese Methode hat auf dem Gebiet der Klangerzeugung in den letzten Jahren stark an Bedeutung gewonnen. Der Grund dafür ist sowohl in der immer besseren Kenntnis der Eigenschaften vieler Instrumente, als auch in der hohen Rechenleistung moderner Computersysteme zu finden. Weiters bietet diese Methode den Musikern gute Werkzeuge zur Erzeugung traditioneller und experimenteller Klänge. Die Steuerung eines solchen Instrumentes entspricht im allgemeinen besser der physikalischen Realität als bei anderen Methoden der synthetischen Klangerzeugung. Nicht der Klang, sondern das Instrument selbst wird nachgebildet. Die Komplexität eines Klangbildes hängt somit von der Struktur des Modells beziehungsweise von den Algorithmen, welche es beschreiben, ab. Es gibt einen genauen funktionalen Zusammenhang zwischen einer Aktion des Spielers, also der Steuerung und der Reaktion des Modells. Die Anwendung physikalischer Modelle ist jedoch nicht nur auf die Klangsynthese beschränkt. Oft wird das Modell eines Instrumentes, oder auch das eines anderen Objektes, zur Analyse und zum besseren Verständnis seiner Funktion verwendet. Die verbreitete Methode der Finiten-Elemente-Analyse ist ein gutes Beispiel für diese Art der Anwendung.

Wie genau das reale Objekt durch sein physikalisches Modell nachgebildet werden kann, hängt in erster Linie von der örtlichen und zeitlichen Diskretisierung des Systems ab. Weitere Kriterien sind die genaue Kenntnis der Randbedingungen sowie die materialtypischen Eigenschaften (Federkonstanten, Temperaturverhalten, Verformung, ...). Je besser diese Eigenschaften im Modell verarbeitet werden, desto mehr Rechenleistung wird für die Simulation verbraucht. Die Wahl der Parameter ist somit immer ein Kompromiß zwischen Zeitaufwand und Genauigkeit.

3.1.1 Strukturierung eines Modells

Bei der Entwicklung eines physikalischen Modells, wie zum Beispiel eines Musikinstrumentes, ist es von Vorteil, dieses in einzelne Blöcke zu unterteilen. Unter den vielen Möglichkeiten sind folgende drei Kriterien der Aufteilung von besonderer Bedeutung [17]:

- (a) physikalische Ähnlichkeit
- (b) funktionelle Struktur

(c) Einfachheit der formalen Beschreibung

Am Beispiel einer Violine könnte eine Aufteilung nach dem Prinzip der physikalischen Ähnlichkeit folgendermaßen aussehen: Bogen-Saite-Steg-Korpus. Teilt man das Instrument nach seinen funktionellen Einheiten auf, wird man einen Block für die Anregung und einen zweiten für den Resonator, welcher in diesem Fall aus Steg, Saiten und Resonanzboden besteht, bilden. Eine Aufteilung entsprechend (c) kann anhand der Komplexität der Bestimmungsgleichungen für das Modell getroffen werden. Hier empfiehlt es sich, einen linearen und einen nichtlinearen Teil zu definieren.

Die Entscheidung für eine Aufteilung muß letztendlich von den Anforderungen an das Modell abhängig gemacht werden (z.B. Steuerungsmöglichkeiten, Zugriff auf verschiedene Größen, vorhandene Rechenleistung).

Trotz der unterschiedlichen Möglichkeiten ein Modell zu strukturieren, kann fast in jedem Fall eine grundsätzliche Aufteilung in Anregungsmechanismus und Resonator getroffen werden. Ich möchte im folgenden prinzipielle Möglichkeiten der Modellierung der Anregung auflisten.

3.1.1.1 Modellierung der Anregung

1. Setzen von Anfangsbedingungen

Bei dieser Methode ist die Anregung kein eigener Teil, sondern es wird nur der Anfangszustand des Resonators festgelegt. Da es sich bei einem Resonator um ein lineares stabiles System handelt, wird dieser nach einer bestimmten Zeit in seine Gleichgewichtslage "schwingen". Ein Beispiel dafür ist das Zupfen einer Gitarre. Eine realistische Anfangsbedingung ist eine dreieckförmige Auslenkung der Saite. In Abhängigkeit des Zupfpunktes, also der Form des Dreiecks, wird sich auch das Klangspektrum des Resonators verändern. Auch der Karplus-Strong Algorithmus fällt unter diese Art der Anregung.

2. Direkte Anregung

Bei kontinuierlich angeregten Instrumenten reicht es nicht aus, nur bestimmte Anfangsbedingungen zu setzen. Die Anregung stellt ein eigenständiges System dar, welches in der Lage ist, das entsprechende Verhalten zu generieren. Ein klassisches Beispiel für diese Art der Anregung ist das Auslesen von in Tabellenform gespeicherten Werten. Geringe Rückwirkungen vom Resonator oder Einflüsse vom Spieler können bei dieser Methode berücksichtigt werden.

3. Speicherlose, nichtlineare Modelle

Die Anregung wird hier durch eine bestimmte nichtlineare Funktion, welche zum Beispiel von der Aktivität des Spielers und der Rückwirkung des Resonators abhängt, gebildet. Ein Beispiel dafür stellt die Klarinette dar, bei welcher der Luftstrom in das Instrument durch einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen

dem Luftdruck im Mund des Spielers und dem Druck am Anfang der schwingenden Luftsäule durch das nichtlineare Verhalten des Rohrblattes gebildet wird. Hier zeigt sich der entscheidende Vorteil zu dem vorher genannten Anregungssystem. Der Resonator spielt eine entscheidende Rolle für die Anregung. Der Grad der Nichtlinearität wird in starkem Maße von den physikalischen Parametern, wie etwa dem Druck der Lippen auf das Rohrblatt, beeinflusst. Aufgrund dieser Abhängigkeit ist es nicht möglich, solche Funktionen in Tabellenform zu implementieren, wodurch beträchtliche Rechenleistung verbraucht wird.

Die Bezeichnung "speicherlos" bezieht sich auf den starren funktionalen Zusammenhang zwischen den einzelnen Größen. Wenn nun auch das dynamische Verhalten des anregenden Systems berücksichtigt werden soll, muß das mechanische Modell nachgebildet werden.

4. Anregung mit mechanischem Modell

Der Anregungsmechanismus wird durch ein mechanisches Netzwerk aus idealen Masse-, Feder- und Reibungselementen, die gegebenenfalls nichtlinear sind, dargestellt. Das dynamische Verhalten dieses Systems kann mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Anfangsbedingungen können entsprechend den physikalischen Gegebenheiten gesetzt werden. Ein typisches Beispiel stellt das in Kapitel 2.3.4 vorgestellte Modell der Interaktion zwischen Hammer und Saite eines Klaviers dar.

Diese Methode ist sehr flexibel anzuwenden. Es ist eine Vielzahl von Modellen des Bogens, der Lippen, etc. in der Literatur zu finden [15],[16],[18]. Je nach Anforderung können diese Modelle bis zu einem sehr hohen Grad an die physikalische Realität angepaßt werden.

3.1.1.2 Modellierung des Resonators

Den zweiten großen Block eines vollständigen Modells stellen die Resonatoren dar. Hier kann ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit behauptet werden, daß es sich um kausale, lineare und zeitvariante Systeme handelt. Unter den vielen Möglichkeiten der Beschreibung solcher Systeme möchte ich wie bei der Anregung einige für die Musiksynthese sehr brauchbare Methoden anführen.

1. Übertragungsfunktionsmodelle

Diese Art der Modellierung basiert auf einer Beziehung zwischen einem bestimmten Eingangssignal und einem Ausgangssignal. Aufgrund der Linearität kann das mit einer Übertragungsfunktion realisiert werden. Die Modellierung kann als Transformation eines dualen Paares von Variablen, wie zum Beispiel Druck und Schnelle einer schwingenden Luftsäule oder Kraft und Geschwindigkeit einer Saite, aufgefaßt werden. Die zentrale Rechenoperation ist die Faltung eines Anregungssignales mit der Impulsantwort des Resonators. Die physikalische Struktur ist bei diesem Modell nicht direkt zu erkennen.

Eine andere Möglichkeit ist das Aufteilen des Resonators in homogene

Abschnitte. Die Bestimmungsgleichungen entstehen zum Beispiel durch den Reflexionsgrad der Wellen an den Grenzen zwischen den einzelnen Teilen. Jeder Abschnitt wird durch eine entsprechende Impulsantwort dargestellt. Bei zeitabhängigen Vorgängen, wie einem Vibrato auf einer Violine, bedarf es meist einer grundlegenden Veränderung der Filter für den Resonator. Ein Modell zur Erzeugung realistischer Klänge muß somit mit der Möglichkeit zur dynamischen Veränderung der Filterkoeffizienten ausgestattet sein.

2. Mechanische Modelle

Im Prinzip gilt hier das gleiche wie für die mechanischen Modelle der Anregung. Ein typisches Beispiel dafür ist die Modellierung einer schwingenden Platte. Nach einer entsprechenden Quantisierung erhält man ein System aus partiellen Differentialgleichungen, welche in den meisten Fällen numerisch gelöst werden müssen. In Abbildung 36 ist ein Ausschnitt eines solchen Modells dargestellt. Die Elemente J stellen die einzelnen diskreten Elemente dar. Sie sind als Viertor ausgeführt und mit jeder benachbarten Zelle verbunden. Die physikalischen Eigenschaften des Materials müssen in die Verbindungen eingebracht werden. Die Zellen an der Begrenzung nach außen hin beeinhalten auch die Randbedingungen. Die Verbindungen sind bidirektional, da der Informationsaustausch in jede Richtung funktionieren muß. Das Element S ist als Fünftor ausgeführt, da hier zusätzlich die Wirkung einer externen Größe, der Anregung, berücksichtigt werden kann.

Abbildung 36 [26]: Ausschnitt eines zweidimensionalen Modells

3. Modalanalysemodelle

Nach systemtheoretischen Überlegungen kann ein Modell auf eine

Parallelschaltung von gedämpften Resonanzkreisen reduziert werden. Das in 2.3.5.2 vorgestellte Modell macht sich dieses Prinzip zunutze. Diese Art des Modellierens weist eine starke Ähnlichkeit mit den klassischen Methoden der additiven und subtraktiven Synthese auf.

Das Hauptproblem liegt in der Handhabung der Parameter und in der Komplexität der Beschreibung der modalen Struktur [17].

4. Wellenleitermodelle

Das Wellenleitermodell basiert auf der analytischen Lösung der Gleichung für die Ausbreitung von Wellen in einem homogenen Medium (D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung). Der Resonator eines Musikinstrumentes besteht aus einer gewissen Anzahl von Verzögerungsgliedern und Filtern und aus Verbindungselementen zwischen den einzelnen homogenen Abschnitten. Dieses Modell eignet sich in besonderem Maße zur Nachbildung von schwingenden Saiten und Luftsäulen. Aufgrund seiner hohen Effizienz und dem guten Bezug zur physikalischen Realität stellt es auch die Grundlage für diese Arbeit dar.

Die Effizienz dieses Modells wird besonders deutlich, wenn man das Wellenleitermodell vom mechanischen Modell ableitet. Eine Saite kann durch eine Vielzahl von Masseteilchen, welche durch Feder-Dämpfer-Elemente verbunden sind, beschrieben werden. Wenn es sich um eine homogene Saite handelt, haben alle Elemente die gleiche Gestalt. Man hat nun die Möglichkeit, das gesamte System aus einem verlustlosen Wellenleiter und einem einzigen Filterblock aufzubauen (siehe Abbildung 39). Der Wellenleiter ist eine einfache Verzögerungsleitung, welche mit geringem Rechenaufwand durch einen Ringpuffer realisiert werden kann. Der Filterblock kann entsprechend den Anforderungen an das Modell und den verfügbaren Systemressourcen gestaltet werden.

3.1.1.3 Die Verbindung der Blöcke

Einen anderen wichtigen Teil eines physikalischen Modells bilden die Verbindungen zwischen den einzelnen Blöcken und der Außenwelt. Im einfachsten Fall handelt es sich um unidirektionale Verbindungen, bei denen die Information nur von einem Block zum nächsten weitergegeben wird. Modelle des Vokaltraktes werden häufig auf diese Art realisiert.

Bei den meisten Instrumenten tritt jedoch eine Interaktion auf, bei welcher der Zustand eines Teiles eine große Rolle für das Verhalten der benachbarten spielt. Dieser Effekt spielt beim Anregungsmechanismus der Klarinette eine große Rolle. Aber auch beim sehr kurzen Anregungsimpuls des Klaviers hat die Rückwirkung der angeschlagenen Saite auf den Hammer einen entscheidenden Einfluß auf die Klangfarbe. Gerade für die transienten Vorgänge in der Anfangsphase des Klanges ist eine genaue Modellierung des Informationsaustausches unumgänglich.

Bei der Herstellung dieser Verbindungen muß jedoch Verschiedenes

berücksichtigt werden. Die einzelnen Blöcke dürfen nicht unabhängig voneinander modelliert werden, da eine genaue Schnittstelle definiert werden muß. Ein anderes Problem stellen nicht berechenbare Schleifen dar. Diese entstehen, wenn eine bestimmte Ausgangsgröße eines Blockes direkt abhängig ist vom Ausgang eines anderen, mit dem dieser eine Schleife bildet. In solchen Fällen kann das Einbringen eines zusätzlichen Verbindungselementes Abhilfe schaffen. Dies kann im einfachsten Fall ein Verzögerungselement sein.

Andere Aufgaben eines Verbindungselementes sind die Transformation der Variablen (Integration, Differentiation,..) oder eine Abstratenkonversion. Obwohl dieser Block einen zusätzlichen Rechenaufwand mit sich bringt, kann dieser durch die unabhängige Modellierung der anderen Teile oft mehr als kompensiert werden.

3.2 Die Modellierung des Klaviers

In Kapitel 3 habe ich die physikalischen Eigenschaften des Klaviers zusammengefaßt und eine Vielzahl von mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten diskutiert. Entsprechend dem Aufbau des vorigen Kapitels sollen nun Schritt für Schritt die Modelle für die einzelnen Funktionseinheiten gebildet werden.

Bei der Nachbildung von Instrumenten liegt naturgemäß der Wunsch nahe, daß das entsprechende Modell in Echtzeit funktioniert, um realistisch gespielt werden zu können. Aus diesem Grund wird bei den entsprechenden Modellen auf besondere Effizienz geachtet.

Sämtliche Berechnungen und Filterentwürfe wurden mit MatLab durchgeführt. Für die Simulationen der mechanischen Modelle (Interaktion, Saite, etc.) diente die MatLab-Toolbox Simulink. Einfache Modelle der Saite sowie ein lineares Modell der Interaktion wurden auch als Echtzeitanwendung auf einem NeXT-Computer mit entsprechender Signalprozessorkarte implementiert. Als Software diente die grafikorientierte Programmiersprache MAX.

3.2.1 Das Modell der Saite

3.2.1.1 Herleitung des Wellenleitermodells

Die Grundlage für das Modell der Saite auf der Basis von Wellenleitern bildet die D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung (Formel 37). Die Auslenkung der Saite wird durch die Summe von einer nach links y_l und einer nach rechts y_r

$$y(x, t) = y_r(x - ct) + y_l(x + ct)$$

laufenden Welle gebildet:

Für Simulationen ist es notwendig, diese Gleichung in den digitalen Bereich zu transformieren. Dazu bedarf es einer zeitlichen und örtlichen Quantisierung. Die Funktion soll zu den Zeitpunkten T abgetastet werden. Für meine Simulationen habe ich in den meisten Fällen die bei der Audio-CD übliche Abtastfrequenz f_s von 44,1 kHz gewählt. Die örtliche Quantisierung entsteht automatisch durch die Distanz X , welche eine Welle in der Abtastzeit zurücklegt.

$$X = cT$$

Das bedeutet, daß sich die Wellenfront pro Abtastzeitintervall T um ein örtliches Intervall X weiterbewegt. Formell drückt sich die Digitalisierung in einer Änderung der Bezeichnung der Variablen aus.

$$x \rightarrow x_m = mX \quad t \rightarrow t_n = nT$$

In (133) substituiert, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} y(t_n, x_m) &= y_r(t_n - x_m/c) + y_l(t_n + x_m/c) \\ &= y_r(nT - mX/c) + y_l(nT + mX/c) \\ &= y_r[(n - m)T] + y_l[(n + m)T] \end{aligned}$$

Da beide Argumente mit der Zeit T multipliziert werden, kann die Gleichung auf die Abtastzeit normiert werden. Daraus ergibt sich eine etwas einfachere Schreibweise, wobei das hochgestellte "+" den nach rechts laufenden Anteil kennzeichnet, und das "-" den nach links laufenden.

$$y^+(n) = y_r(nT) \quad y^-(n) = y_l(nT)$$

Der Term $y^+(n-m)$ kann nun als Ausgang einer m Stufen langen Verzögerungsleitung, deren Eingang $y^+(n)$ ist, betrachtet werden. Der nach links laufende Anteil $y^-(n)$ ist als Ausgang einer Verzögerungsleitung der Länge m mit dem Eingang $y^-(n+m)$ zu sehen. In Abbildung 37 ist ein Teil dieses Systems grafisch dargestellt. Die physikalische Ausgangsgröße kann an jedem Ort durch die Summe der beiden Anteile gebildet werden. In der Abbildung ist dies für den Ort $x = 0$ und $x = 3X = 3cT$ gezeigt.

Abbildung 37 [20]: Teil eines Wellenleitermodells

Dieses System ist die Grundlage für einen eindimensionalen Wellenleiter, wie er für die Modellierung der schwingenden Saite in dieser Arbeit verwendet wird. Prinzipiell kann die exakte Ausgangsgröße nur zu diskreten Zeitpunkten nT und an den entsprechenden Ortspunkten nX gebildet werden. Weiters ist zu beachten, daß die Signale entsprechend dem Shannon'schen Abtasttheorem

bandbegrenzt sind. Wenn die Auslenkung an einem beliebigen Ort benötigt wird, bedarf es einer Interpolation zwischen den einzelnen Abtastwerten. Entsprechende Interpolationsfilter sind in [29] sehr gut zusammengefaßt.

Das in Abbildung 37 gezeigte Modell der schwingenden Saite liefert die Auslenkung $y(x,t)$ als Ergebnis. Es ist jedoch auch möglich, das Wellenleitermodell auf verschiedene andere Größen wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Krümmung oder Kraft anzuwenden. Das kann etwa bei der Verbindung mit dem Anregungsmechanismus eine deutliche Vereinfachung mit sich bringen. Diese alternativen Größen sind durch lineare Operationen, wie Integration und Differentiation, miteinander verknüpft.

Der nächste Schritt ist die Begrenzung der Länge der Saite. Setzt man eine völlig starre Befestigung der Saitenenden voraus, so bedeutet das einen Phasensprung von 180 Grad bei der Reflexion der Welle. Die Anzahl der benötigten Verzögerungsglieder N für die gesamte Saite ergibt sich aus der Länge und der örtlichen Quantisierung X . f_1 ist die Grundfrequenz des Resonators, welche durch einen vollständigen Umlauf der Welle gebildet wird.

$$N = \frac{2L}{X} = \frac{2L}{cT} = \frac{f_s}{f_1}$$

Für den Fall des Klaviers soll eine externe Anregung durch den Hammer möglich sein. Weiters wird eine Ausgangsgröße benötigt, welche zum Beispiel die Wirkung der Saite auf den Steg darstellt. Das modifizierte Modell ist in Abbildung 38 dargestellt. Nebeneinander liegende Verzögerungsglieder sind zugunsten einer besseren Übersicht zu Blöcken zusammengefaßt. Der Faktor -1 an den Enden bewirkt den Phasensprung um 180 Grad.

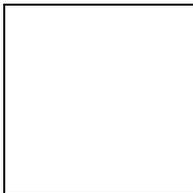


Abbildung 38: Einfaches Modell einer Saite

Wird dieses Modell durch einen Impuls angeregt, erhält man einen ungedämpften Oszillator mit der Grundfrequenz f_1 und dem durch die Form des

Impulses bestimmten zeitlichen Verlauf des Signals. Dieses Blockschaltbild entspricht mit Ausnahme des Ortes des Ausgangssignals dem in 2.3.4 verwendeten Modell für die Saite.

Wenn der zeitliche Verlauf der Anregung bekannt ist, also nicht erst die Rückwirkung der Saite auf den Hammer während des Anschlages berechnet werden muß, kann das in Abbildung 38 dargestellte Modell noch etwas vereinfacht werden. Der Hammerimpuls durchläuft ein Kammfilter, welches durch die Zeitverzögerung $\alpha \cdot N$, der an der Agraffe reflektierten Welle entsteht. Das gefilterte Signal wird einem aus einer einzigen Verzögerungsleitung bestehendem Resonator zugeführt. Das entstehende Ausgangssignal bleibt unverändert.

Bei diesem Modell handelt es sich jedoch noch immer um einen verlustlosen Resonator. Für den Aufbau eines realen Klaviers sind verschiedene Verbesserungen zu treffen. Ich möchte diese der Vollständigkeit wegen in das neue Blockschaltbild einbringen und nur sehr kurz ihre Funktion erklären. Eine genaue Beschreibung dieser Elemente erfolgt in den folgenden Abschnitten.

Das dreieckige Abschwächungselement soll zusammen mit dem Schleifenfilter SF die frequenzabhängigen Verluste beschreiben. Zur Modellierung der Inharmonizität der realen Saite wird ein Allpaß IF (Inharmonizitätsfilter) mit entsprechendem Phasenverlauf verwendet. Weiters wird ein zusätzliches Allpaßfilter TF (Tonhöhenfilter) zur Einstellung einer exakten Tonhöhe eingebracht. Abbildung 39 zeigt das vollständige Modell einer Klaviersaite für eine Schwingungsebene. Diese Struktur habe ich für die meisten Simulationen verwendet.

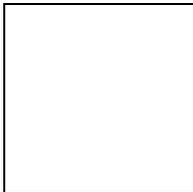


Abbildung 39: Vollständiges Modell einer Saite

Für eine reale Simulation einer Klaviersaite ist für jede Schwingungsebene (vertikal, horizontal und longitudinal) ein solches Saitenmodell zu verwenden. Bei einer dreifach besaiteten Taste werden neun Wellenleiter benötigt. Zusätzlich muß noch die Koppelung untereinander berücksichtigt werden.

3.2.1.2 Berücksichtigung von Verlusten

Eine mathematische Beschreibung der inneren Verluste einer Klaviersaite findet sich in Punkt 2.1.2.5 dieser Arbeit.

Weiters muß der Energieverlust an den Steg berücksichtigt werden. Korrekterweise müßte die Koppelung der Saiten an den Steg der physikalischen Realität entsprechend modelliert werden. Das entscheidende Kriterium für die Dämpfung der Saitenschwingung ist das Verhältnis der Impedanz des Steges und der Saite(n). Im Gegensatz zur Interaktion des Hammers mit der Saite läßt der große Unterschied der Impedanzen des Steges und der Saiten (Faktor 10-100) eine getrennte Behandlung der beiden Teile zu. Im elektrotechnischen Sinne handelt es sich hier um eine Quelle (Saite) mit geringem Innenwiderstand, welche eine hochohmige Last (Steg) speist.

Es hat sich als sehr vorteilhaft erwiesen, beide Arten von Verlusten in einem gemeinsamen Filter zu implementieren. Sowohl die inneren Verluste als auch der Energieverlust an den Steg steigen mit der Frequenz an. Dieses Verhalten kann durch ein Tiefpaßfilter mit geeigneter Verstärkung modelliert werden.

3.2.1.2.1 Die Charakteristik des Schleifenfilters

Für meine Simulationen verwende ich ausschließlich FIR-Filter zweiter Ordnung mit symmetrischer Impulsantwort. Diese haben den Vorteil einer konstanten Gruppenlaufzeit und somit keinen Einfluß auf die Teiltonstruktur des Klanges (siehe 2.2.1.3). Ebenso ist die durch das Filter bedingte Absenkung der Grundfrequenz nicht von der Frequenz abhängig. Die Schleifenverstärkung darf in keinem Fall den Wert 1 übersteigen. Der Rechenaufwand ist bei dieser Filterordnung sehr gering.

Abbildung 40: Typischer Frequenzgang eines in den Simulationen verwendeten Schleifenfilters. FIR 2. Ordnung, Grenzfrequenz = $0.9 f_s/2$.

Der Verlauf des Amplitudenganges läßt sich am besten mit Hilfe einer Spektralanalyse zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten abschätzen. Der Pegelabfall der einzelnen Teiltöne (Frequenzbereiche) bestimmt die Dämpfung des Filters. Eine Einteilung in Frequenzbereiche anstatt in einzelne Teiltöne ist aufgrund der starken zeitlichen Schwankung der Teiltonpegel notwendig. Weiters muß berücksichtigt werden, daß nur in Frequenzbereichen, welche starke Teiltöne enthalten, eine sinnvolle Berechnung des Amplitudenganges möglich ist. Die entsprechenden Algorithmen sind in folgenden MatLab-Funktionen implementiert: STP.M und DECAY.M.

3.2.1.3 Modellierung der Inharmonizität

Die Inharmonizität einer realen Klaviersaite, wie in Punkt 2.1.4 ausführlich behandelt, kann auch mit der Gruppenlaufzeit beschrieben werden. Die höheren Teiltöne haben eine größere Ausbreitungsgeschwindigkeit und dadurch eine kürzere Umlaufzeit auf der Saite. Das Wellenleitermodell muß so verändert werden, daß die Gruppenlaufzeit des Resonatorfilters der Periodendauer der einzelnen Teiltöne entspricht. Da die Amplitude nicht beeinflusst werden soll, muß ein Allpaßfilter verwendet werden.

Im voraus sei bemerkt, daß natürlich jedes Filter in der Resonatorschleife einen zusätzlichen Rechenaufwand bedeutet. Die verwendete Filterordnung stellt somit immer einen Kompromiß zwischen Rechenzeit und Genauigkeit der Approximation dar.

Eine gewisse Einschränkung kann durch den begrenzten Frequenzbereich des Klavierklanges getroffen werden. Das heißt, daß der Phasenverlauf des Filters nur im Frequenzbereich mit relativ starken Teiltönen angepaßt werden muß. Der höchste Frequenzbereich muß nicht zwingend in die Approximation miteinbezogen werden.

Weiters muß beachtet werden, daß für einen tiefen Ton eine höhere Filterordnung notwendig ist als für einen hohen. Um ein qualitativ gleiches Ergebnis zu erhalten, muß die Ordnung des Allpaßfilters pro Oktave nach unten verdoppelt werden.

Wie aus Abbildung 39 ersichtlich, besteht das Modell der Saite aus einer bestimmten Anzahl von Verzögerungsgliedern und einem Filterblock. Die Verzögerungsleitung ist mit N Einheiten angegeben. Es muß beachtet werden, daß jedes Filter eine zusätzliche Gruppenlaufzeit hat und dadurch die Tonhöhe sinkt. Um eine Veränderung der Tonhöhe zu vermeiden, muß nach jeder Variation eines Filters die Anzahl der Verzögerungselemente angepaßt werden. Formel (138) gilt somit nur für den Fall, daß sich keine zusätzlichen Filter in der Resonatorschleife befinden. Hier wird auch der Vorteil des linearphasigen Schleifenfilters deutlich. Eine Korrektur der Verzögerungselemente ist nur bei einer Änderung der Filterordnung notwendig.

Bevor ich genauer verschiedene Möglichkeiten des Filterentwurfes behandle,

möchte ich mit einem allgemeinen Beispiel die Wirkung von Allpässen bei der Modellierung eines dispersiven Resonators aufzeigen. Die Übertragungsfunktion $L(z)$ eines solchen Systems kann folgend angegeben werden:

$$L(z) = z^{-N} A(z)$$

Für die Phase gilt:

$$\arg L(z) = -N\omega T + \arg A(z)$$

N ist die Anzahl der Verzögerungselemente und $A(z)$ die Übertragungsfunktion des Allpasses. Jede Frequenz, bei welcher die Phase von $L(z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, wird vom Resonator unterstützt. In Abbildung 41 ist ein Vergleich zwischen einem linearphasigen und einem dispersiven Resonator dargestellt.

Abbildung 41 [25]: Vergleich zwischen linearphasigem und dispersivem Resonator.

Die mit $\omega_n T$ bezeichneten Frequenzen haben einen exakten harmonischen Zusammenhang. Die durch den Allpaß verursachte Phasenverzerrung (gebogene Linie) bewirkt eine Absenkung der einzelnen Moden (mit $\omega_n T$ gekennzeichnet). Man kann deutlich sehen, daß die Grundfrequenz stärker beeinflußt wird als die höheren Moden. Der harmonische Zusammenhang ist nicht mehr vorhanden. Es wird eine Spreizung der einzelnen Teiltöne verursacht. Die Aufgabe besteht nun darin, einen Phasenverlauf für $L(z)$ zu finden, welcher der Teiltonstruktur eines realen Klavierklanges möglichst gut entspricht.

Im folgenden sind die grundlegenden Schritte für den Filterentwurf angeführt. Den Ausgangspunkt für die Berechnung bilden die Teiltonfrequenzen f_n eines realen Klavierklanges. Diese können mit Hilfe einer Spektralanalyse oder mit einer in 2.1.4.1 angeführten Näherungsformel berechnet werden. Weiters muß ein Allpaß $A(z)$, dessen Koeffizienten in einem iterativen Verfahren optimiert werden, vorgegeben werden. Da der Allpaß die Tonhöhen beeinflußt, muß die Anzahl der Verzögerungselemente N angepaßt werden.

$$N = \frac{2\pi n + \arg A(2\pi f_n T)}{2\pi f_n T}$$

Üblicherweise wird N an die Grundfrequenz des Klanges angepaßt ($n=1$). Bei den tiefsten Tönen kann jedoch auch der zweite oder dritte Teilton herangezogen werden. Die gesamte Phase ($\arg L(z)$) kann nun für die vorgegebenen Teiltonfrequenzen f_n berechnet werden (Formel 140). Die Division durch -2π ergibt eine virtuelle Teiltonnummer n_p , welche ein Maß für die

Abweichung von den gewünschten Frequenzen darstellt.

$$np_n = \frac{\arg L(2\pi f_n T)}{-2\pi}$$

Wird N an den Grundton angepaßt, muß np_1 genau 1 sein. Bei einer perfekten Approximation stimmt np_n genau mit den Teiltonnummern n überein. Die durch den Resonator unterstützten Frequenzen f_{p_n} können mit folgender Formel abgeschätzt werden:

$$f_{p_n} = \frac{n f_n}{np_n}$$

Diese Formel ist insofern eine Schätzung, da nicht explizit die Frequenz, bei welcher die Phase ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, berechnet wird. Es ist nur die Abweichung durch die virtuelle Teiltonnummer bekannt. Der daraus resultierende Fehler wird jedoch im Zuge der Iterationen verschwindend klein, da np immer besser mit n übereinstimmt.

Als Approximationsvorschrift eignet sich am besten die Minimierung eines quadratischen Fehlers. Da für musikalische Anwendungen eine logarithmische Einteilung der Frequenzachse günstig ist, möchte ich auch in diesem Fall den Fehler als Inharmonizitätsdifferenz Ih_{diff} in cent angeben.

$$Ih_{diff}(n) = 1200 \lg \frac{n}{np_n} \quad [cent]$$

Daraus kann die Summe des quadratischen Fehlers (err) berechnet werden. Der Pegel der Teiltöne nimmt mit zunehmender Frequenz ab. Daher ist es sinnvoll, die quadratischen Fehler entsprechend zu gewichten (z.B. $1/n$ oder $1/n^2$). Zusätzlich kann das Gewicht des Fehlers an die Empfindlichkeit des menschlichen Gehörs angepaßt werden. In der Formel ist die Gewichtung durch den allgemeinen Faktor $g(n)$ berücksichtigt.

$$err = \sum_n g(n) \cdot Ih_{diff}(n)^2$$

Ich möchte im folgenden die zwei von mir verwendeten Möglichkeiten zur Minimierung des Fehlers anführen.

1. Aufsuchen des Minimums einer Fehlerfläche

Die Dimension der Fläche wird durch die Anzahl der variierbaren Parameter des Resonators bestimmt. Diese Methode funktioniert sehr gut bei einer zweidimensionalen Fehlerfläche. Da jede Kombination der Parameter berechnet werden muß, steigt der Rechenaufwand mit der Parameterzahl beträchtlich. Sehr kleine Schrittweiten oder mehrdimensionale Fehlerflächen sind für dieses Verfahren nicht gut geeignet. Von großem Vorteil ist, daß die Form der Fläche (lokale Minima, Sattelpunkte) keine Auswirkung auf die Berechnung hat. Das globale Minimum kann in jedem Fall gefunden werden.

2. Gradientenabstiegsverfahren

Das Minimum des Fehlers wird mit Hilfe des Gradienten der Fehlerfläche

gesucht [4]. Der Vorteil liegt in der guten Anwendbarkeit bei mehrdimensionalen Flächen. Die Rechenzeit steigt hier linear und nicht zur Potenz der Dimension wie bei (1.) an. Die einzelnen Filterparameter a_i (siehe 3.2.3.1) werden nach folgendem Prinzip verändert:

$$a_i(n+1) = a_i(n) - \beta \frac{\partial \text{err}(a_1, a_2, \dots)}{\partial a_i}$$

Die Schwierigkeit bei dieser Methode liegt in der geeigneten Wahl von β . Der Gradient selbst kann nur durch eine Inkrementierung der Filterparameter angenähert werden. Anders als bei (1.) hat hier die Form der Fläche einen entscheidenden Einfluß darauf, ob das globale Minimum gefunden werden kann oder nicht. Ein lokales Minimum kann zu einem frühzeitigen "Festlaufen" des Algorithmus führen. Die Wahl des Startwertes beeinflusst deshalb die Qualität der Minimierung.

In der praktischen Anwendung hat sich die Durchführung der Minimierung des Fehlers in zwei Schritten als sehr effizient erwiesen. Zuerst wird mit einer relativ großen Schrittweite das globale Minimum gesucht. Die so erhaltenen Parameter dienen dann als Startwerte für das Gradientenabstiegsverfahren.

3.2.1.3.1 Entwurf des Inharmonizitätsfilters

Ich möchte nun einige Filter, beginnend mit dem einfachsten, beschreiben und deren Parameter an eine vorgegebene Teiltonstruktur anpassen. Als Versuchston dient in den meisten Fällen das c' (262 Hz). Zur Berechnung der inharmonischen Teiltonfrequenzen wird die in [32],[34] angegebene Formel herangezogen. Die physikalischen Daten der c' -Saiten stammen aus [24] ($L=0.62$ m, $d=1.017$ mm, $T=670$ N).

Ein einpoliger Allpaß mit dem Pol auf der positiven reellen Achse in der z -Ebene eignet sich sehr gut, die gewünschte Phasenverzerrung zu erzeugen [7],[25]. Die Übertragungsfunktion für ein solches Filter lautet:

$$A(z) = \frac{-a + z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad a = \text{Polradius}$$

Abbildung 42: Inharmonizität eines Resonators für verschiedene Polradien a im Vergleich zur gewünschten (durchgehende Linie), $+..a = 0.6$, $*..a = 0.7$, $o..a = 0.8$

Als Vorgabe dienen die berechneten Frequenzen für die ersten 30 Teiltöne des c' . Das überstreicht den Frequenzbereich bis etwa 9 kHz. Es wurden vier Allpässe kaskadiert. Bei einer Gewichtung des Fehlers mit $1/n^2$ ergibt sich für eine optimale Anpassung der Wert $a = 0.696$. Die Summe des Fehlers beträgt 106 cent^2 . Ohne Gewichtung liegt der Wert für a bei 0.73 . Dieses Ergebnis lässt sich anhand von Abbildung 42 auch grafisch nachvollziehen. Der Fehler bei den hohen Teiltönen wird durch den größeren Polradius geringer. Die Abweichung im Bereich des 10. Teiltons vergrößert sich jedoch.

Durch eine Variation der Filter (z.B. je 2 Filter mit gleichem Polradius) kann in manchen Fällen eine geringe Reduktion des Fehlers bewirkt werden. Es handelt sich in diesem Fall um ein zweidimensionales Problem. Der Fehler bildet eine von den Parametern a_1 und a_2 gebildete Fläche. In Abbildung 43 ist ein typisches Beispiel einer solchen Fehlerfläche zu sehen.

Abbildung 43: Beispiel einer zweidimensionalen Fehlerfläche

Die Angaben entsprechen denen vom vorigen Beispiel. Je zwei Allpässe haben dieselbe Charakteristik. Der minimale Fehler ergab sich bei $a_1 = a_2 = 0.696$. Eine Verbesserung war bei diesem Beispiel durch den weiteren Freiheitsgrad nicht möglich.

Aus Abbildung 42 läßt sich erkennen, daß eine Veränderung des Polradius immer nur eine Verringerung des Fehlers für einen bestimmten Teiltonbereich zulasten eines anderen mit sich bringt.

Nun sollen zwei Allpässe erster Ordnung durch einen zweiter Ordnung ersetzt werden. Dieses neue Filter hat ein konjugiert komplexes Polpaar, dessen Radius sich im Bereich der unteren Teiltöne verändern läßt. Die maximale Gruppenlaufzeit in der Nähe des Poles soll den gewünschten Effekt -die Reduktion der Inharmonizität der unteren Teiltöne- bringen. Die Variation des Polradius bringt eine weitere Dimension in die Approximation ein. Für das c' ergibt sich der minimale Fehler bei den Parametern: $a_1 = 0.81$, $a_2 = 0.88$, Polwinkel = 0.2356 (rad). Die gewichtete Fehlersumme konnte von 106 auf 38 cent^2 reduziert werden. In Abbildung 44 sind die Inharmonizitäten, welche sich durch die beiden Allpässe ergeben, im Vergleich zur vorgegebenen dargestellt.

Der Entwurf der bisher verwendeten Filter beruht auf der Einschränkung der Approximation auf den unteren Frequenzbereich. Die hohen Teiltöne werden mit geringer Gewichtung oder gar nicht berücksichtigt. In Abbildung 45 ist die Inharmonizität des oben modellierten Resonators (o) im Vergleich mit der gewünschten (durchgehende Linie) bis 22 kHz dargestellt.

Abbildung 44: * = 4 Allpässe 1. Ord., o = 2 AP 1.Ord. und 1 AP 2. Ord.

Abbildung 45: Inharmonizität des oben modellierten Resonators (o) im Vergleich mit der gewünschten (durchgehende Linie) bis 22 kHz

In dieser Darstellung sieht man deutlich den großen Fehler bei hohen

Frequenzen. Will man für einen bestimmten Zweck auch diesen Frequenzbereich in die Approximation einbringen, eignet sich ein in [6] vorgestelltes Verfahren. Die Filterkoeffizienten für einen Allpaß können direkt aus einer vorgegebenen Gruppenlaufzeit berechnet werden. Die Filterordnung kann beliebig gewählt werden. Eine Gewichtung der Teiltöne ist bei diesem Verfahren jedoch nicht möglich. Der gesamte Frequenzbereich wird in die Berechnung miteinbezogen. Dieser Algorithmus ist in der MatLab-Funktion YEGNA.M implementiert. Nicht der absolute Wert, sondern der Verlauf der Gruppenlaufzeit ist entscheidend.

Im Zuge meiner Filterentwürfe hat sich gezeigt, daß der Algorithmus ab einer Dynamik der Gruppenlaufzeit (= Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert) von etwa 40 Samples nicht stabil arbeitet. Unter dem c' ist somit kein direkter Entwurf möglich. Die Gruppenlaufzeit für das c' überstreicht einen Bereich von etwa 70 bis 170 Samples. Dieses Problem kann auf folgende Weise umgangen werden:

Die Gruppenlaufzeit wird durch eine ganze Zahl (L) dividiert, sodaß die Dynamik maximal 40 Samples beträgt. Nun läßt sich ein passendes Filter berechnen. Zur Erzielung der gewünschten Gruppenlaufzeit müssen L dieser Filter kaskadiert werden. Um Welligkeiten im Verlauf der Gruppenlaufzeit, welche durch Pole nahe am Einheitskreis verursacht werden, zu vermeiden, sollte die gesamte Filterordnung nicht unter einem Drittel der maximalen Gruppenlaufzeit (in Samples) liegen. Für das c' ist etwa ein Filter 60. Ordnung notwendig. Auch die Ordnung der Teilfilter soll so hoch wie möglich gewählt werden. Drei Filter 20. Ordnung liefern ein besseres Ergebnis als sechs Filter 10. Ordnung. Durch die Wahl einer ungeraden Filterordnung kann das Auftreten einer möglichen negativen Inharmonizität im Bereich der ersten Teiltöne vermieden werden. Der gesamte Fehler kann dadurch jedoch nicht reduziert werden.

Das Ergebnis eines Filterentwurfes für das c' ist in Abbildung 46 (o) dargestellt. Es wurden drei Filter 20. Ordnung verwendet.

Abbildung 46: Inharmonizitätsfilter nach dem Verfahren von [6]

Es ist praktisch keine Abweichung von der gewünschten Inharmonizität zu erkennen. Diese Methode kann aufgrund des Filteraufwandes nur für experimentelle Zwecke verwendet werden. Für Echtzeitanwendungen kommt dieses Verfahren nicht in Frage. Ein großer Vorteil ist jedoch die geschlossene Lösbarkeit der Gleichung für die Filterkoeffizienten.

3.2.1.4 Erzielung einer exakten Tonhöhe

Bei den vorangegangenen Betrachtungen wurde noch nicht berücksichtigt, daß bei einer gewöhnlichen Verzögerungsleitung nur ganzzahlige Vielfache des Abtastzeitintervalls realisierbar sind. Das führt zu einer Quantisierung der Frequenzachse. Im Bereich der höchsten Töne des Klaviers (um 4 kHz) bewirkt die Wegnahme eines einzigen Verzögerungselementes bei einer Abtastfrequenz von 44.1 kHz einen Anstieg der Tonhöhe um etwa 400 Hz. Das ist für musikalische Anwendungen nicht brauchbar. Bei den tiefen Tönen liegen die realisierbaren Frequenzen absolut gesehen wesentlich näher beisammen. Dieser Vorteil wird jedoch durch die logarithmische Skala der Intervalle relativiert. In Abbildung 47 ist die Quantisierung der Frequenzachse bei einer Abtastfrequenz von 44.1 kHz dargestellt. Man kann deutlich die Nichtlinearität der Quantisierung erkennen.

Abbildung 47: Quantisierung der Frequenz durch ganzzahlige Verzögerungselemente

Zur exakten Stimmung eines Instrumentes ist es notwendig, nicht-ganzzahlige Verzögerungselemente zu erzeugen. Man kann diese mit Hilfe von FIR-Interpolationsfiltern oder Allpässen realisieren. In [29] sind mehrere Möglichkeiten zum Entwurf beider Filterarten aufgezeigt. Die Autoren stellen auch die entsprechenden MatLab-Funktionen zur Approximation dieser Filter zur Verfügung.

Die Interpolationsfilter haben den Vorteil einer geringen Phasenverzerrung, aber sie weisen vor allem bei niedriger Ordnung eine starke Tiefpaßcharakteristik auf. Zusätzlich tritt bei verschiedenen Typen eine Welligkeit im Amplitudengang auf, welche auch den Wert 1 übersteigen kann. Diese Nachteile machen diese Filterart für meine Anwendung nicht gut einsetzbar. In Abbildung 48 ist ein Lagrange-Interpolationsfilter vierter Ordnung dargestellt. Man sieht auch, daß sich die Tiefpaßcharakteristik in Abhängigkeit des fraktionalen Anteils ändert und bei einem Wert von 0.5 Samples am stärksten ist.

Abbildung 48: Lagrange Interpolationsfilter 4. Ordnung. Der Wert des fraktionalen Anteils beträgt 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 Samples (von oben nach unten). Die Amplitudengänge für 0.6, 0.7, usw. sind symmetrisch zu denen von 0.4, 0.3, ...

Abbildung 49: Gruppenlaufzeit eines Allpaßfilters 4.Ordnung zur Erzeugung eines fraktionalen Delays. Die fraktionalen Anteile betragen 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 Samples.

Für den Fall des Klaviers stellen Allpässe die bessere Variante zum Entwurf einer fraktionalen Verzögerungseinheit dar. Die dabei entstehende Phasenverzerrung hat den positiven Effekt, daß bei einer günstigen Wahl das Inharmonizitätsfilter unterstützt wird. In Abbildung 49 ist die Gruppenlaufzeit eines Allpasses zweiter Ordnung in Abhängigkeit des fraktionalen Anteils dargestellt. Es handelt sich hier um ein Filter mit maximal flacher Phasenverzögerung.

Bei allen in [29] vorgestellten Filtern bezieht sich die Angabe des fraktionalen Anteils auf den tiefen Frequenzbereich. Zu den hohen Frequenzen hin zeigen diese eine von der Ordnung und der Approximationsvorschrift abhängige Abweichung vom gewünschten Wert. Bei den höchsten Tönen kann das zu einer Verstimmung führen. Um dieses Problem zu umgehen, habe ich ein iteratives Verfahren zum Entwurf eines entsprechenden Filters implementiert. Die Grundlage bildet ein von den Inharmonizitätsfiltern bekannter Allpaß zweiter Ordnung. Der Polwinkel des konjugiert komplexen Polpaares bekommt den Wert der zu stimmenden Frequenz. Das hat den Vorteil, daß das Filter im Bereich der Grundfrequenz, die es zu stimmen gilt, die höchste Gruppenlaufzeit aufweist. Die benötigte Verzögerung kann somit mit dem geringstmöglichen Polradius realisiert werden. Das garantiert maximale Stabilität und minimale Phasenverzerrung. Der Polradius wird dabei so lange variiert, bis die exakte Grundfrequenz erreicht ist. Zur Berechnung der jeweiligen Verzögerung wird Formel (138) verwendet. Die Grundfrequenz kann in Abhängigkeit der Schrittweite sehr genau gestimmt werden ($<10^{-3}$ Hz). Die MatLab-Funktion zur

Berechnung dieses Filters heißt TAP2.M.

Um Systemressourcen zu sparen (Echtzeitanwendung, beschränkte Filteranzahl), kann die Stimmung der Töne auch mit den Inharmonizitätsfiltern realisiert werden. Ein eigenes Tonhöhenfilter wird in diesem Fall nicht benötigt. Zur Intonation werden ein oder mehrere Filterkoeffizienten so lange verändert, bis N (Formel 138) die nächstgelegene ganze Zahl erreicht. Eine geringe Veränderung der Teiltonstruktur ist jedoch nicht zu vermeiden. Die MatLab-Funktion TAPIH.M kann die unter 3.2.1.3.1 angeführten Filter in entsprechender Weise verändern.

3.2.2 Modellierung der Interaktion zwischen Hammer und Saite

In Kapitel 2.3.4 habe ich ein Modell für die Interaktion zwischen Hammer und Saite vorgestellt. Die MatLab-Toolbox Simulink ist sehr gut geeignet, die Differentialgleichung des Hammers numerisch zu lösen. Bei einer Echtzeitimplementation ist das aus Effizienzgründen nicht möglich. Hier hat man die Möglichkeit, den zeitlichen Verlauf der Kontaktkraft in einer Tabelle zu speichern oder das System Hammer-Saite durch entsprechende digitale Filter zu realisieren. Die Anregung durch einen einzelnen Impuls ist für das Klavier die beste Lösung.

3.2.2.1 Lineares Modell der Interaktion

In [27] ist ein sehr effizientes lineares Modell für die Interaktion vorgestellt, welches ich in Simulink und Max implementiert habe.

Die Herleitung wird im Bildbereich (s -Ebene) vollzogen. Die Bezeichnungen für die verwendeten Laplace-transformierten Größen sind im folgenden angeführt:

R_0	...Wellenimpedanz der unbegrenzten Saite
R_S	...Wellenimpedanz der begrenzten Saite
F_S	...Kraft auf der Saite
V_S	...Geschwindigkeit der Saite
R_H	...Impedanz des Hammers
F_H	...Federkraft des Hammers
H_∞	...Übertragungsfunktion für die unendliche Saite
H_T	...Übertragungsfunktion für die begrenzte Saite
L_S	...Tiefpaß für die Impulsanregung

Die Impedanz der einseitig begrenzten Saite

Bei einer begrenzten Saite wird eine anregende Geschwindigkeitswelle an der Agraffe reflektiert und invertiert. Sie erreicht nach der Zeit t_a (Formel 85) wieder den Anschlagpunkt. Mit Hilfe des Verschiebungssatzes kann dieser reflektierte Anteil folgend berücksichtigt werden:

$$V_s = \frac{F_s}{2R_0} (1 - e^{-s t_a})$$

Daraus kann die Impedanz der begrenzten Saite abgeleitet werden:

$$R_s = \frac{F_s}{V_s} = \frac{2R_0}{1 - e^{-s t_a}}$$

Die Impedanz des Hammers

Der Hammer besteht aus der Masse m und einer linearen Feder mit der effektiven Steifigkeit C_e (siehe 2.2.2). Die Gleichungen für den Hammer lauten:

$$F_H = R_H \left(V_s - \frac{V}{s} \right) \quad \text{mit} \quad R_H = \frac{C_e s}{s^2 + \frac{C_e}{m}}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit des Hammers wird durch die Sprungfunktion V/s berücksichtigt.

Während des Kontaktes von Hammer und Saite sind die Geschwindigkeiten der Saite und des Endpunktes der Hammerfeder gleich. Die beiden zugehörigen Kräfte heben sich auf.

$$F_s = - F_H = - R_H \left(V_s - \frac{V}{s} \right) = - R_H \left(\frac{F_s}{R_s} - \frac{V}{s} \right)$$

Für die auf die Saite wirkende Kraft folgt daraus:

$$F_s = \left(\frac{R_H R_s}{R_H + R_s} \right) \frac{V}{s} = (R_H \parallel R_s) \frac{V}{s}$$

Die von der Anfangsgeschwindigkeit des Hammers verursachte Kraft wird von der Parallelschaltung der Impedanzen von Hammer und Saite bestimmt. Für die unbegrenzte Saite erhält man als Übertragungsfunktion für das Impedanzfilter ein gedämpftes System zweiter Ordnung.

$$H_\infty = \frac{C_e s}{s^2 + \frac{C_e}{m}} \parallel 2R_0 = \frac{C_e s}{s^2 + \frac{C_e}{2R_0} s + \frac{C_e}{m}}$$

Für den Fall der begrenzten Saite verändert sich diese Formel entsprechend der Impedanz R_s .

$$H_T = \frac{C_e s}{s^2 + \frac{C_e}{m}} \parallel \frac{2R_0}{1 - e^{-s t_a}} = \frac{C_e s}{s^2 + \frac{C_e}{2R_0} (1 - e^{-s t_a}) s + \frac{C_e}{m}}$$

Die beiden letzten Formeln erlauben die Formulierung eines rekursiven Zusammenhanges:

$$H_T = \frac{H_\infty}{1 - e^{-s t_a} H_\infty}$$

Das obige Filter soll nun so verändert werden, daß es anstatt der Sprungfunktion durch einen Impuls angeregt werden kann. Das Impedanzfilter

H_∞ kann als Differentiation eines Tiefpaßfilters L_S aufgefaßt werden.

$$H_\infty = s L_S = s \frac{C_e}{s^2 + \frac{C_e}{2R_0}s + \frac{C_e}{m}}$$

Die Funktion für die Kraft F_S vereinfacht sich zu

$$F_S = \frac{V}{S} H_\infty = \frac{V}{S} s L_S = V L_S$$

Die Eingangsgröße V ist als Laplace-transformierte des Impulses $V\delta(t)$ zu verstehen, welche durch die Differentiation der Eingangssprungfunktion V/s entsteht. Es handelt sich nun um ein impulserregtes System.

Bei der Implementation ist zu beachten, daß die Ausgangsgröße (Kraft) in der Rückkoppelungsschleife auf eine Größe mit derselben Einheit wie die Eingangsgröße transformiert wird. Die notwendigen Schritte sind die Division durch $2R_0$ und eine Differentiation. Das entsprechende Blockschaltbild ist in Abbildung 50 dargestellt. Das Element ta ist eine Verzögerungsleitung mit der Laufzeit der Welle vom Anschlagpunkt zur Agraffe und zurück.

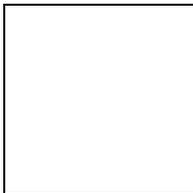


Abbildung 50: Blockschaltbild eines rekursiven Hammerfilters

Der letzte Schritt ist die Bilineartransformation der Filter. Die Transformationsvorschrift lautet:

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

Das so erhaltene digitale Modell der Interaktion ist durch den in Abbildung 51 gezeigten Simulink Koppelplan dargestellt. Das zugehörige Modell ist EXCIT6.MDL.

Abbildung 51: Simulink Koppelplan eines rekursiven Hammerfilters

Das Element "Switch" bewirkt den Kontaktverlust des Hammers von der Saite. Sobald eine negative Kraft auftritt, wird der Ausgang null gesetzt. Mögliche Mehrfachkontakte können mit diesem Modell simuliert werden. Der Faktor $1/(2R_0)$ und der von der Bilineartransformation stammende Faktor $2/T$ sind zu einem Block zusammengefaßt. Das gesamte System ist auf T normiert. Die Filterkoeffizienten sind Funktionen von C_e , R_0 und m . Sie müssen bei jeder Änderung einer dieser Größen neu berechnet werden. R_0 und m verändern sich nur, wenn eine andere Taste gespielt wird. C_e hingegen ist definitionsgemäß auch eine Funktion der Anschlagstärke.

Die erzielten Ergebnisse sind mit den in Kapitel 2.3.3 analytisch berechneten identisch. Bei gleichen physikalischen Vorgaben (lineare Feder) liefert natürlich auch das in Kapitel 2.3.4 vorgestellte Modell dasselbe Ergebnis.

Die im digitalen Modell (Abbildung 51) verwendete Verzögerungsleitung t_a kann nur Reflexionen von der Agraffe simulieren. Sollen auch Reflexionen vom Steg berücksichtigt werden, so muß das Modell des Hammers mit dem einer beidseitig begrenzten Saite (siehe Abbildung 24) verbunden werden. Ein entsprechendes digitales Modell ist unter dem Namen "The Wave Digital Hammer" in [26] beschrieben. Das aus digitalen Filtern bestehende System ist sehr realitätsnah, da auch die Nichtlinearität und die Hystereseeigenschaft des Hammerfilzes berücksichtigt werden können. Die entsprechenden nichtlinearen Funktionen können nicht direkt berechnet werden; sie sind in Tabellen gespeichert. Die Filterkoeffizienten müssen dynamisch veränderbar sein. Ich habe dieses Modell für den Fall einer linearen Feder im Simulink-Modell WDH1.MDL implementiert.

3.2.3 Koppelung der Saiten

Eine physikalische Beschreibung der Koppelung der Saiten an den Steg und untereinander erfolgte in Kapitel 2.5. Eine Möglichkeit der Modellierung der inneren Verluste und des Energietransfers von der Saite in den Resonanzboden ist in 3.2.1.2 aufgezeigt. Für die Simulation des komplizierten Vorganges der Koppelung bei mehrfach besaiteten Tönen hat man verschiedene Möglichkeiten:

1. Addition der einzelnen Saitensignale

Bei dieser einfachen Methode werden die einzelnen Saiten und Schwingungsebenen (vertikal, horizontal und longitudinal) als unabhängige Systeme betrachtet. Eine kleine Verstimmung der Saiten führt durch die auftretende Schwebung zu einer gewissen Bereicherung des Klanges. Die physikalische Realität wird jedoch vernachlässigt. Die Addition von vertikaler und horizontaler Schwingungsebene eignet sich sehr gut, um einen Klang mit zwei Ausschwingraten zu erzeugen. Für einen realistischen Klang sollte der Anfangspegel der horizontalen Schwingung etwa 20 dB unter dem der vertikalen liegen [3]. Die Dämpfungsfaktoren liegen in der Größenordnung von 0.98 (vertikal) und 0.99 (horizontal).

2. Verwendung eines Koppelfilters

Die Bewegung des Steges hängt direkt von der Geschwindigkeit der Saiten ab. Es gelten folgende Bedingungen: Die Geschwindigkeit der Saitenenden (v_1 und v_2) ist gleich der Geschwindigkeit v_b des Steges:

$$v_b = v_1 = v_2$$

Die Kraft auf den Steg ist gleich der Summe der Kräfte in den Endpunkten der Saiten:

$$f_b = f_1 + f_2$$

Eine Zerlegung in eine vor- und rücklaufende Welle (siehe 3.2.2.1) führt zur folgenden Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten der Saiten und des Steges [21]:

$$V_b(s) = H_b(s) (R_1 V_1^+(s) + R_2 V_2^+(s))$$

R_1 und R_2 sind die Wellenimpedanzen der Saiten, und

$$H_b(s) = \frac{2}{R_b(s) + R_1 + R_2}$$

kann als Koppeladmittanz bezeichnet werden. Mit der Kenntnis der Geschwindigkeit des Steges können die rücklaufenden Wellen berechnet werden.

$$\bar{V}_1(s) = V_b(s) - V_1^+(s) \quad \text{und} \quad \bar{V}_2(s) = V_b(s) - V_2^+(s)$$

Für den Fall von zwei identischen Saiten kann man die Übertragungsfunktion (161) noch etwas vereinfachen.

$$V_b(s) = H_b(s) [V_1^+(s) + V_2^+(s)]$$

$$\rightarrow H_b(s) = \frac{2R_0}{R_b(s) + 2R_0}$$

Für N gleiche Saiten gilt:

$$H_b(s) = \frac{2R_0}{R_b(s) + NR_0}$$

Die Impedanz des Steges kann in einer guten Näherung als resistiv angenommen werden. H_b wird durch eine einfache Multiplikation realisiert. Der Abschwächer in der Resonatorschleife muß so korrigiert werden, daß nur die inneren Verluste der Saite berücksichtigt werden. Der Energietransport in den Steg ist nun durch H_b berücksichtigt. Mit dieser Methode läßt sich sehr gut ein Klang mit zwei Ausschwingraten erzeugen, da die Schleifendämpfung von der Summe der Geschwindigkeitswellen bestimmt wird. Eine auftretende Gegenphasigkeit hat entsprechend der physikalischen Realität eine geringere Dämpfung der Saitenschwingung zur Folge. Durch die unterschiedlichen Schwebungsfrequenzen der einzelnen Teiltöne entsteht ein sehr komplexes Ausschwingverhalten des Klanges.

Filter zur Simulation von masse- oder federdominiertem Verhalten des Steges sind in [21] angegeben. Weiters ist es möglich, das Schleifenfilter SF in das Koppelungsfilter zu integrieren. Die Voraussetzung dafür ist die Annahme, daß der Energieverlust an den Steg die inneren Verluste der Saite weit übersteigt [27].

$$H_b(s) = \frac{2}{N + \frac{1 + SF(s)}{1 - SF(s)}}$$

Abbildung 52 [21]: Blockdiagramm für gekoppelte Saiten

Für den allgemeinen Fall von N verschiedenen Saiten ist eine N*N Matrix notwendig, deren Elemente die entsprechenden Übertragungsfunktionen enthalten.

3.2.4 Impulsantwort des Resonanzbodens

Der Resonanzboden hat den Vorteil, daß sein Verhalten in hohem Maße linear und zeitunabhängig ist. Die Größe und die damit verbundene Anzahl von Schwingungsmoden machen eine Modellierung nach physikalischen Gesichtspunkten sehr aufwendig. Entweder verwendet man eine Vielzahl von Resonanzfiltern, oder der Resonanzboden wird mit Hilfe eines zwei- oder dreidimensionalen Wellenleitermodells nachgebildet. Für Echtzeitanwendungen sind beide Methoden nicht brauchbar.

Eine einfachere Lösung ist die Messung der Impulsantwort des Resonanzbodens. Je nach Meßaufbau können auch Anteile der Raumimpulsantwort miteinbezogen werden. Das vom Wellenleitermodell der Saite erhaltene Signal muß mit dieser Impulsantwort gefaltet werden. Auch hier ist ein sehr aufwendiges Filter notwendig.

Die Linearität vieler Teile des Klaviermodells erlaubt jedoch nach dem Kommutativgesetz eine Vertauschung einzelner Funktionseinheiten [22]. Die Saite kann so in jedem Fall mit dem Resonanzboden vertauscht werden. Der Vorteil liegt darin, daß nicht das Ausgangssignal, sondern lediglich der kurze Hammerimpuls gefiltert werden muß. Das vorgefilterte Signal wird wie die ursprüngliche Anregungsfunktion dem Resonator zugeführt. Für sehr lange Impulsantworten sind in [21] Möglichkeiten zur Verkürzung angegeben.

Für Echtzeitanwendungen bietet sich auch eine Bereicherung des modellierten Klanges durch externe Hall- und Effektgeräte an.

Bei der Konstruktion eines Resonanzbodens strebt der Instrumentenhersteller ein ausgeglichenes Übertragungsverhalten über den gesamten Frequenzbereich an. Zur synthetischen Erzeugung der Impulsantwort bietet sich aus diesem Grund weißes Rauschen an, dessen Pegel exponentiell ausklingt. Um den rascheren Abfall der höheren Moden zu simulieren, kann ein zusätzliches zeitvariantes Tiefpaßfilter, dessen Grenzfrequenz kontinuierlich sinkt, hinzugefügt werden [27].

Für meine Simulationen verwende ich exponentiell ausklingendes weißes Rauschen, dessen Pegel in 0.1 bis 0.2 Sekunden um 60dB sinkt. Diese Impulsantwort wird mit dem Hammerimpuls gefaltet und dem Wellenleitermodell der Saite zugeführt.

3.2.5 Die Pedale

Eine einfache Möglichkeit zur Simulation des gedrückten rechten Pedals ist die Verlängerung der Impulsantwort des Resonanzbodens. Durch das Vertauschen von Saite und Resonanzboden ist jedoch keine Änderung der Stellung des Pedals während eines Klanges möglich. Eine aufwendige Methode bietet das Einbringen von zusätzlichen Saiten, deren Grundfrequenzen mit den Teiltönen des gespielten Tones zusammenfallen. Diese Saiten werden durch ein entsprechendes Koppelfilter angeregt.

Das "una corda" Pedal kann auf ähnliche Weise modelliert werden. Der Hammerimpuls wird beim Modell eines Saitenpaares nur einer Saite zugeführt. Die zweite, welche als passiver Resonator wirkt, erhält über das Koppelfilter die entsprechende Energie. Bei der Modellierung der Interaktion ist jedoch zu beachten, daß nur die Impedanzen der angeschlagenen Saiten verwendet werden.

An dieser Stelle sei auch das Loslassen einer Taste erwähnt. Die plötzliche Dämpfung der Saitenschwingung kann durch die Einstellung des Abschwächers in der Resonatorschleife auf etwa 0.95 simuliert werden [27].

3.3 Simulationen und Ergebnisse

3.3.1 Beschreibung der verwendeten Modelle und Funktionen

3.3.1.1 Interaktion

Der erste Schritt war die Zusammenfassung der in der Literatur [23],[28],[30],[32] angegebenen physikalischen Daten von Hämmern, Saiten des Anschlagpunktes etc.. Da meist nur die Werte für einzelne Tasten vorhanden sind, habe ich durch geeignete Interpolation die Werte für die anderen Töne berechnet. Folgende MatLab-Funktionen dienen zur Berechnung der Daten für die einzelnen Tasten:

datham.m ...physikalische Daten der Hämmer
datsait.m ...physikalische Daten der Saiten

Alle Größen beziehen sich auf einen Konzertflügel.

Für die Berechnung der Interaktion stehen drei verschiedene Modelle zur Verfügung. Der Aufbau entspricht dem in 2.3.4 abgebildeten System. Der Unterschied liegt in der unterschiedlichen Beschreibung der Charakteristik des Hammerfilzes.

strike1.mdl ...lineares Modell des Hammers (Formel 71)
strike2.mdl ...nichtlineares Modell (Formel 69)
strike3.mdl ...nichtlineare Federkonstante und Hystereseeigenschaft
des Hammerfilzes (Formel 78)

3.3.1.2 Saitensimulation

Der so erhaltene Kraftimpuls, den die Saite am Anschlagpunkt erfährt, wird wie in 3.2.4 beschrieben, mit der Impulsantwort des Resonanzbodens gefaltet. Die zugehörigen MatLab-Funktionen sind: RESB.M und RESB1.M. Dieses vorgefaltete Signal wird dann einem Saitenmodell zugeführt. Entsprechend der Anzahl der Saiten einer Taste stehen drei verschiedene Modelle zur Verfügung:

saite2.mdl ...für einfach besaitete Tasten, vertikale und horizontale
Schwingungsebenen werden berücksichtigt
skop41.mdl ...für zweifach besaitete Tasten, je zwei vertikale und
horizontale Schwingungsebenen werden berücksichtigt, die
Koppelung der Saiten ist durch einen als resistiv
angenommenen Steg modelliert
skop31.mdl ...für dreifach besaitete Tasten, die Auswirkung der
Koppelung von drei Saiten macht eine zusätzliche
Modellierung der horizontalen Schwingungsebene überflüssig.
skop31uc.mdl ...wie skop31.mdl, es werden nur 2 Saiten
angeschlagen, die dritte wirkt als passiver Resonator (Simulation
des "una corda" Pedales).

3.3.1.3 Die Filter im Wellenleitermodell

Das FIR-Tiefpaßfilter 2. Ordnung wird in den einzelnen Saitenmodellen nicht verändert. Die Grenzfrequenz wird jedoch bei den Modellen für die tieferen Saiten nach unten verschoben. Der horizontale Mode in "saite2.mdl" benötigt eine Grenzfrequenz von $0.3 f_s/2$ zur Erzielung eines realitätsnahen Klanges. Das Abschwächungsglied im Resonator muß kontinuierlich an die Tonhöhe angepaßt werden. Ansonsten würden die tiefen Töne zu lange und die hohen zu kurz klingen.

Den aufwendigsten Teil im Resonator stellt das Inharmonizitätsfilter dar. Dieses besteht aus einer von der Tonhöhe abhängigen Anzahl von Allpässen 1. Ordnung und einem Filter 2. Ordnung (siehe 3.2.1.3.1). Aus Stabilitätsgründen habe ich die gesamte Filterordnung auf 14 begrenzt, obwohl die tiefsten Töne für eine gute Approximation der Inharmonizität ein Filter höherer Ordnung benötigen. Zusätzlich sind die Polradien für die Filter 1. Ordnung auf 0.8 und das Filter 2. Ordnung auf 0.9 begrenzt.

Die nach dem in 3.2.1.3 vorgestellten Verfahren optimierten Koeffizienten sind in einem Datenfile gespeichert (Name = apkoef.mat) und werden bei jedem Aufruf für eine Simulation von dort ausgelesen.

Die Erzielung der exakten Tonhöhe geschieht durch eine Veränderung des Polradius der Allpässe erster Ordnung mit der MatLab-Funktion TAPIH.M.

Um die Anzahl der Filterblöcke in den Saitenmodellen unabhängig von der Filterordnung konstant zu halten, werden die Allpässe 1. Ordnung mit Hilfe einer Polynommultiplikation zu einem einzigen Filter zusammengefaßt (MatLab-Funktion SUMAP.M).

Der Frequenzunterschied der einzelnen Saitenpaare und Tripel wird automatisch beim Aufruf einer Simulation festgelegt (DATMDL.M). Der Grad der Verstimmung wurde durch eine gehörmäßige Beurteilung von simulierten Klängen optimiert.

In der Funktion GPSIM.M sind die oben beschriebenen Schritte zusammengefaßt. Die Vorgabe der gewünschten Taste (1-88) und der Anschlaggeschwindigkeit ($V = 0.5 - 6$ m/s für pp - ff) ermöglicht eine vollständige Initialisierung der Modelle und Durchführung der Simulation.

Das Aufschlaggeräusch der Taste auf das Tastenbett ist durch eine sehr steiflankige Tiefpaßfilterung aus einem aufgenommenen c''' gewonnen. Das Filter hatte eine Grenzfrequenz von etwa 1 kHz. Das Geräusch wird nach der Simulation zum Signal addiert. Das Verhältnis des Pegels vom Signal zum Aufschlaggeräusch sollte für einen realistischen Klang etwa 5:1 betragen.

Die verwendeten Modelle und Funktionen sind auf der beigelegten Diskette gespeichert. Neben den in der Arbeit namentlich genannten entstand im Laufe der Simulationen eine Vielzahl von zusätzlichen Funktionen und Modellen (z.B. Signalanalyse, Entwicklungsstufen zu einem komplexen Modell). Eine Auswahl

dieser ist ebenfalls auf der Diskette gespeichert. Die für die Echtzeitanwendung programmierten MAX-Patches befinden sich ebenfalls auf der Diskette.

Eine Audio-CD mit simulierten Klängen wurde ebenfalls im Zuge dieser Diplomarbeit erstellt. Ein Titelverzeichnis befindet sich im Anhang.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Diplomarbeit stellt ein komprimiertes Nachschlagewerk zum Verständnis der physikalischen Funktionsweise des Klaviers dar. Viele Möglichkeiten der physikalischen Modellierung von Einzelteilen, aber auch eines vollständigen Instrumentes sind aufgezeigt und diskutiert. Die klangliche Qualität der Modelle ist durch Hörbeispiele auf der beigelegten CD dokumentiert. Die erzielten Ergebnisse lassen eine optimistische Prognose für die Erzeugung hochwertiger Klänge auf derzeit verfügbaren Systemen zu. Allerdings stellt im Bereich der Echtzeitanwendung auf NeXT-Computern mit der Software MAX die auf 64 Samples zusammengefaßte Signalverarbeitung ein Problem dar.

Ich hoffe, daß ich bei den Lesern dieser Arbeit Interesse am Experimentieren mit den vorhandenen Modellen geweckt habe und zur Weiterentwicklung des Instrumentes anregen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] ASKENFELT Anders, "Five Lectures on the Acoustics of the Piano", Publications issued by the Royal Swedish Academy of Music No. 64, Stockholm 1990
- [2] KREYSZIG Erwin, "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Spektrum der Wissenschaft, "Die Physik der Musikinstrumente", Spektrum-der-Wissenschaft-Verlagsges. & Co., Heidelberg 1988
- [4] LIM Jae S., OPPENHEIM Alan V., "Advanced Topics in Signal Processing", STEARNS Samuel D., "Fundamentals of Adaptive Signal Processing", Prentice Hall Signal Processing Series
- [5] SCHIMMEL Pianos, "Vom Musikstab zum Pianoforte", Wilhelm Schimmel, Pianofabrik GmbH
- [6] YEGNANARAYANA B., "Design of Recursive Group-Delay Filters by Autoregressive Modeling", IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc., vol. ASSP-30, NO 4, pp. 632-637, August 1992
- [7] ADRIEN Jean Marie, RODET Xavier, "Physical Models of Instruments, a Modular Approach, Application to Strings", IRCAM, ICMC Proceedings 1985, pp. 85-89
- [8] HALL Donald E., "Piano string excitation in the case of small hammer mass", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 79), pp. 141-147, Jan. 1986
- [9] HALL Donald E., "Piano string excitation II: General solution for a hard narrow hammer", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 81), pp. 535-546, Feb. 1987
- [10] HALL Donald E., "Piano string excitation III: General solution for a soft narrow hammer", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 81), pp.547-555, Feb. 1987
- [11] HALL Donald E., "Piano string excitation IV: The question of missing modes", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 82), pp. 1913-1918, Dec. 1987
- [12] HALL Donald E., "Piano string excitation V: Spectra for real hammer and strings", J. Acoust. Soc. Am. (Vol.83), pp. 1627-1638, Apr. 1988
- [13] SUZUKI Hideo, "Model analysis of a hammer-string interaction", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 82), pp. 1145-1151, Okt. 1987
- [14] BOUTILLON Xavier, "Model for piano hammers: Experimental determination and digital simulation", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 83), pp. 746-754, Feb. 1988

- [15] COOK Perry, "An Interactive WaveGuide Brass Instrument Synthesis Workbench for the NeXT Machine", CCRMA, ICMC Proceedings 1991, pp. 297-299
- [16] COOK Perry, "SPASM; a Real-Time Vocal Tract Physical Model Controller; and Singer, the Companion Software Synthesis System", CCRMA, Computer Music Journal 1993
- [17] BORIN G., DE POLI G., SARTI A., "Algorithms and Structures for Synthesis using Physical Models", Padova, Computer Music Journal 4/1992, pp. 30-42
- [18] DEPALLE Ph., RODET X., "A Physical Model of Lips and Trumpet", IRCAM, ICMC Proceedings 1992, pp. 132-135
- [19] PALADIN Andrea, ROCESSO Davide, "A Dispersive Resonator in Real-Time on MARS Workstation", ICMC Proceedings 1992, pp. 146-149
- [20] SMITH Julius O., "Physical Modeling using Digital Waveguides", Computer Music Journal, special issue on Physical Modeling of Musical Instruments, Part I (Vol.16 no.4), pp. 74-91
- [21] SMITH Julius O., "Efficient Synthesis of Stringed Musical Instruments", CCRMA, ICMC Proceedings 1993, pp. 64-71
- [22] SMITH J. O., VAN DUYNE Scott A., "Commutated Piano Synthesis", Stanford, ICMC Proceedings 1995, pp. 335-342
- [23] CHAIGNE Antoine, ASKENFELT Anders, "Numerical simulations of piano strings.
I. A physical model for a struck string using finite difference methods", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 95), pp. 1112-1118, Feb. 1994
- [24] CHAIGNE Antoine, ASKENFELT Anders, "Numerical simulations of piano strings.
II. Comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer-string parameters", J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 95), pp. 1631-1640, March 1994
- [25] VAN DUYNE Scott A., SMITH J. O., "A Simplified Approach to Modeling Dispersion Caused by Stiffness in Strings and Plates", Stanford, ICMC Proceedings 1994, pp. 407-410
- [26] DUYNE Scott A. van, PIERCE John R., SMITH J. O., "Traveling Wave Implementation of a Lossless Mode-Coupling Filter and The Wave Digital Hammer", Stanford, ICMC Proceedings 1994, pp. 411-418
- [27] DUYNE Scott A. van, SMITH J. O., "Developments for the Commuted

Piano”, Stanford, ICMC Proceedings 1995, pp. 319-326

[28] STULOV Anatoli, “Hysteretic model of the grand piano hammer felt”, J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 97), pp. 2577-2585, Apr. 1995

[29] LAAKSO Timo I., VÄLIMÄKI Vesa, KARJALAINEN Matti, and LAINE Unto K., “Splitting the Unit Delay, Tools for Fractional Filter Design”, IEEE Signal Processing Magazine, pp. 30-60, Jan. 1996

[30] CONKLIN Harold A., “Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part I. Piano hammers and tonal effects”, J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 99), pp. 3286-3296, June 1996

[31] CONKLIN Harold A., “Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part II. Piano structure”, J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 100), pp. 695-708, Aug. 1996

[32] CONKLIN Harold A., “Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part III. Piano strings and scale design”, J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 100), pp. 1296-1298, Sept. 1996

[33] GIORDANO N., KORTY A. J., “Motion of a piano string: Longitudinal vibrations and the role of the bridge” J. Acoust. Soc. Am. (Vol. 100), pp. 3899-3907, Dec. 1996

[34] KURZ Michael, FEITEN Bernhard, “Physical modeling of a stiff string by numerical integration”, ICMC Proceedings 1996, pp. 361-364

Anhang A

Inhaltsverzeichnis der CD

Titel Nr.	Beschreibung
1	Simulierter Klang des <u>C</u>
2	Simulierter Klang des C
3	Simulierter Klang des c
4	Simulierter Klang des c'
5	Simulierter Klang des c''
6	Simulierter Klang des c'''
7	Simulierter Klang des c''''
8	Simulierter Klang des c'''''
9	Originalklang des <u>C</u>
10	Originalklang des C
11	Originalklang des c
12	Originalklang des c'
13	Originalklang des c''
14	Originalklang des c'''
15	Originalklang des c''''
16	Originalklang des c'''''
17	Simulierter Saitenklang einer Einzelsaite (a' 440 Hz) mit einem 1.13 ms langem Hanningpuls als Anregung, keine Filter im Resonator, Modell: STUFE1.MDL
18	Wie 17, jedoch mit Tiefpaßfilter zur stärkeren Dämpfung der hohen Teiltöne, Modell: STUFE2.MDL
19	Wie 18, jedoch mit Inharmonizitätsfilter und exakter Tonhöhe

	(443 Hz), Modell: STUFE3.MDL
20	Wie 19, die Anregung erfolgt jedoch mit Berücksichtigung der Interaktion zwischen Hammer und Saite, Modell: SAITE1.MDL
21	Wie 20, drei Saiten werden angeschlagen und ihre Koppelung ist berücksichtigt, Modell: SKOP31.M
22	Wie 21, die Impulsantwort des Resonanzbodens ist in die Simulation miteinbezogen
23	Wie 22, das Aufschlageräusch der Taste auf das Tastenbett ist zum Klang addiert
24	Originalklang des a' (443 Hz)
25 - 31	Diese Titel sind nach derselben Vorgangsweise wie 17 bis 23 erstellt. Der simulierte Ton ist das c''' (1057 Hz)
32	Originalklang des c''' (1057 Hz)
33	Dreiklang: c'-e'-g'-c''
34	Anschlag des a' in 3 Dynamikstufen p-mf-f, Originaldynamik
35	Wie 34, jedoch mit normierter Lautstärke zur besseren Hörbarkeit des Klangfarbenunterschiedes
36	Anschlag der a' Saiten mit 3 verschiedenen Hämmern (je 3 Anschläge). 1. Hammer der Taste 1, 2. Hammer der Taste 49 (=a'), 3. Hammer der Taste 88
37	Vergleich eines gewöhnlichen a' mit einem " <i>una corda</i> " a', Modell: SKOP31UC.MDL
38	Vergleich eines gewöhnlichen a' mit einem nach [6] erzeugten Inharmonizitätsfilter, Modell: YEGSAIT.MDL
39	Vergleich eines gewöhnlich simulierten a' mit einem a' mit viel zu hoher Inharmonizität (Saitendurchmesser = 2 mm)

Die Originalklänge stammen von einem Steinway Modell-D Konzertflügel.
Aufnahmetechnik Projekt von Wolfgang Götzinger, IEM 13/95

