

KUNSTUNIVERSITÄT GRAZ

INSTITUT FÜR ELEKTRONISCHE MUSIK UND AKUSTIK

BACHELORARBEIT

**Klangsynthese von Saiteninstrumenten
mittels Digital Waveguides**

Autor:

Christian OSWALD
Matr.-Nr.: 1231217

Betreuer:

Univ.Prof. Dr. Robert HÖLDRICH

Studienrichtung:
Elektrotechnik - Toningenieur

im Rahmen des Seminars
Musikalische Akustik

Graz,
6. November 2016



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Die Physik der schwingenden Saite	4
2.1	Herleitung der Wellengleichung	4
2.2	Lösung der Wellengleichung	5
2.3	Hintergründe zur Wellengleichung	7
2.4	Eindeutige Lösung mit Anfangsbedingungen	8
2.5	Randbedingungen	10
2.5.1	Eine Randbedingung	10
2.5.2	Zwei Randbedingungen	12
2.6	Lösung im Frequenzbereich	15
2.6.1	Eine Randbedingung	16
2.6.2	Zwei Randbedingungen	17
2.6.2.1	Analyse von Anfangswerten	18
3	Digital Waveguides	20
3.1	Grundlegender Aufbau	20
3.2	Anfangswerte	21
3.3	Randbedingungen	22
4	Erweiterungen des Modells	24
4.1	Verluste	24
4.1.1	Frequenzunabhängige Verluste	24
4.1.2	Frequenzabhängige Verluste	25
4.1.3	Realisierung	28
4.1.3.1	Frequenzunabhängige Verluste	28
4.1.3.2	Frequenzabhängige Verluste	29
4.2	Dispersion	31
4.2.1	Realisierung	33
4.3	Verbindung von Wellenleitern	35
5	Abschluss	39
5.1	Zusammenfassung	39
5.2	Diskussion und Ausblick	40
	Anhang A: Codebeispiel	41
	Anhang B: Klangbeispiele	48
	Literatur	60

1 Einleitung

Im modernen Zeitalter sind wir Zeitzeugen technologischen Fortschritts mit noch nie da gewesener Geschwindigkeit. Die radikal zunehmende Rechenleistung von Prozessoren hat unseren Alltag in bereits vielerlei Hinsicht grundlegend verändert. In technischen Aufgabenstellungen ermöglicht beispielsweise die Finite-Elemente-Methode die Lösung von Problemen höchster Komplexität. Aber auch im Bereich der Klangsynthese werden die neuen Möglichkeiten genutzt, um bessere und genauere Ergebnisse zu erzielen. Die Kategorie des *Physical Modelling* beschäftigt sich, wie der Name bereits sagt, mit der Modellierung physikalischer Geschehnisse in klangerzeugenden Systemen. Dieser Begriff wurde bewusst gewählt, da er bekannte Musikinstrumente wie ein Klavier oder eine Trompete, aber grundsätzlich *alles, was Lärm macht*, umfasst. Eine Unterkategorie ist die Klangsynthese mittels sog. *Digital Waveguides* (zu dt. „digitale Wellenleiter“), welche derartige Systeme als Kombination unterschiedlicher Medien für Wellenausbreitung betrachtet. Die Abtastung des Phänomens der Wellen ermöglicht eine Simulation, welche bis vor kurzem wegen des hohen Rechenaufwands nicht (zufriedenstellend) möglich war. Die Vorteile dieser Methode sind intuitive Parameter (wie z.B. die Länge einer Saite oder deren Material) für die Variation des Klanges, sowie die Möglichkeit, das Originalsystem theoretisch beliebig genau nachzubilden. Im Vergleich dazu wird es z.B. bei der FM-Synthese, welche rein auf Imitation des gehörten Klangs beruht, immer schwieriger, das Ergebnis weiter und weiter zu verbessern und dem Original anzunähern. Allerdings fordert Physical Modelling ein gewisses Verständnis von der Physik der Musikinstrumente vom Anwender, wenn dieser das Klangresultat bewusst steuern möchte. Von einem anderen Blickwinkel aus betrachtet schafft Physical Modelling aber neuen künstlerischen Freiraum, z.B. für die Kreation von „Phantasieinstrumenten“, wie z.B. einem 10 Meter langen Klavier.

Für mich als Student ist dieses Thema besonders interessant, da es einen Bogen über nahezu alle Teilgebiete meines Studiums spannt. Alle Aspekte, wie z.B. Mathematik, Physik, Digitaltechnik und Informatik werden schlussendlich auf ein intuitives und simples Erlebnis zurückgeführt, nämlich einem Höreindruck. Es ermöglicht also wortwörtlich eine intuitive „Greifbarkeit“ all der gelernten Inhalte.

Ziel dieser Arbeit ist die Vermittlung der Grundlagen von schwingenden Saiten sowie deren Simulation mittels Digital Waveguides. Sie ist in drei Kapitel gegliedert. In Abschnitt 2 werden physikalische Grundlagen von schwingenden Saiten und Wellenausbreitung allgemein aufgearbeitet, welche für das Verständnis von Digital Waveguides unerlässlich sind. Abschnitt 3 erarbeitet in Berufung auf jene grundlegende Physik diese Methode der Klangsynthese, mit welcher nun bereits Klänge erzeugt werden können. Um diese Resultate allerdings steuern und einem Klangideal annähern zu können, werden in Abschnitt 4 Erweiterungen des Grundmodells besprochen, welche zunächst physikalisch hergeleitet, und dann mit Mitteln der digitalen Signalverarbeitung in diese Synthese-Methode

eingebaut werden. Diese Verfeinerungen verleihen Musikinstrumenten letztendlich ihre Unterscheidbarkeit und ihren typischen Klangcharakter.

2 Die Physik der schwingenden Saite

In diesem Kapitel werden die physikalischen Eigenschaften einer schwingenden Saite beschrieben, aus denen dann ein simulierbares Modell, in unserem Fall das der Digital Waveguides (DWG) abgeleitet wird.

2.1 Herleitung der Wellengleichung

Die folgenden Überlegungen gelten für eine Saite ohne Biegesteifigkeit. In der Realität erzeugt man jedoch beim Biegen einer Saite rücktreibende Kräfte. Dieser Einfluss auf das Verhalten der Saite wird in Abschnitt 4.2 erläutert. Außerdem gelten die durchgeführten Vereinfachungen nur bei kleinen Auslenkungen sowie kleinen Steigungen der Auslenkung, was in der Praxis aber immer der Fall ist. Daraus folgt, dass die einzelnen Elemente der Saite nur in vertikaler Richtung schwingen. Die Wirkung der Schwerkraft wird vernachlässigt. Bis zur Einführung von Randbedingungen in Abschnitt 2.5 gilt die Saite als unendlich lang. Eine Saite ist mit der Saitenspannung K gespannt, die als Kraft auf die Enden der Saite in entgegengesetzte Richtungen wirkt. Zur Gültigkeit des nachfolgenden Modells muss diese Saitenspannung grundsätzlich groß sein. Weiters ist ihre Masse homogen verteilt, welche als lineare Massendichte ϵ als Masse pro Längeneinheit angegeben wird. Um das Verhalten einer schwingenden Saite verstehen zu können, betrachtet man zunächst ein Stückchen mit elementarer Länge ds , siehe Abb. 1. Die Saite ist in x -Richtung gespannt und wird in y -Richtung ausgelenkt. Die Bewegung der Saite in Abhängigkeit von Ort und Zeit wird also mit $y(x, t)$ beschrieben. Die hier angeführte Herleitung der Wellengleichung basiert auf den Methoden von [11] und [12].

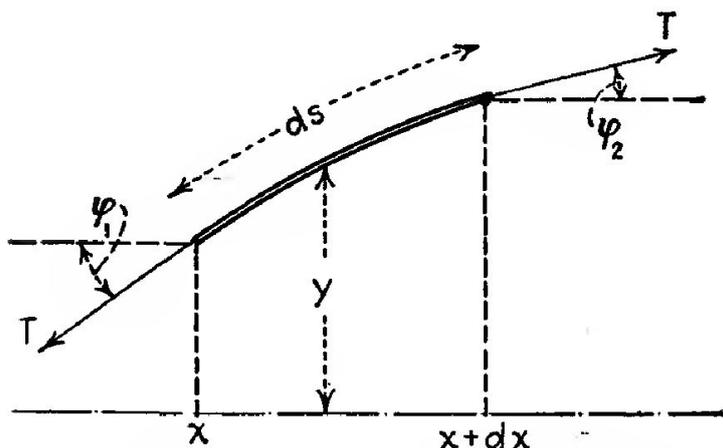


Abbildung 1: Saitenstück elementarer Länge [12]

Die grundlegende Frage lautet, wie die Saite auf Auslenkungen aus der Ruhelage reagiert. Darum ist die uns interessierende Größe jene Kraft, welche die Saite in ihre Ruhelage zurücktreibt, also die Komponente in Richtung der y-Koordinate. Unter der Bedingung, dass die Auslenkung klein gegenüber der Saitenlänge ist, kann angenommen werden, dass an jedem Saitenelement dieselben Spannkraften T wirken. Die gesuchte Kraft ist also die Summe der y-Komponenten von T , nämlich

$$F_y = T (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1)). \quad (1)$$

Das Minus zwischen den Termen ergibt sich durch die unterschiedliche Bezugsrichtung von ϕ_1 und ϕ_2 . Um die Krümmung des Saitenstückes hervorzuheben, setzen wir $\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi_1$. Unsere Annahmen gelten, wie bereits erwähnt, ausschließlich für kleine Auslenkungen und somit kleine ϕ , also ist $\sin(\phi_1) \approx \phi_1$ bzw. $\sin(\phi_1 + \Delta\phi_1) \approx \phi_1 + \Delta\phi_1$. Daher vereinfacht sich Glg. (1) zu

$$F_y = T \Delta\phi_1.$$

Die Masse des Saitenstückes ist $dm = ds \epsilon \approx dx \epsilon$ aufgrund ihrer niedrigen Steigung. Nun kann das zweite Newton'sche Axiom („ $F = m \cdot a$ “) für das Saitenstück angesetzt werden:

$$T \Delta\phi_1 = dx \epsilon \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

Ist dx hinreichend klein, geht auch $\Delta\phi_1$ gegen Null; somit ist die Steigung des Saitenstückes zu einem bestimmten Zeitpunkt als $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ gegeben. Dieser Term entspricht allerdings auch $\tan(\phi_1)$. Diese Beziehung wird nun unter Verwendung der Kettenregel ein zweites Mal nach x abgeleitet:

$$\begin{aligned} \tan(\phi_1) &= \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\phi_1)} \frac{d\phi_1}{dx} &= \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Laut unserer Annahme ist ϕ_1 sehr klein, also ist $\cos^2(\phi_1)$ quasi 1. Nun kann durch Elimination von $\frac{d\phi_1}{dx}$ Glg. (3) in Glg. (2) eingesetzt werden, wobei $\Delta\phi_1 = d\phi_1$. Das Ergebnis geringfügig umgeformt ist die sog. *lineare, eindimensionale Wellengleichung* für die schwingende Saite:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}} \quad (4)$$

2.2 Lösung der Wellengleichung

Im Vergleich zu anderen partiellen Differentialgleichungen ist es bei der Wellengleichung einfach, eine allgemeine Lösung zu finden. Denn sie fordert lediglich von der Lösungsfunktion $y(x, t)$, dass ihre zweite Ableitung nach dem Ort ihrer zweiten Ableitung nach der

Zeit bis auf einen konstanten Faktor entspricht. Somit kann man bereits erahnen, dass *jede* (zweimal differenzierbare) Funktion *in einer Variable* $y(x \pm ct)$ die eindimensionale Wellengleichung löst. Dabei ist c eine vorerst frei wählbare Konstante. Die Ableitungen einer derartigen Funktion lauten:

$$y(x \pm ct) = y(u(x, t)) \quad \text{mit} \quad u(x, t) = x \pm ct \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x \pm ct) = \frac{d}{du} y(u) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{d}{du} y(u) \quad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x \pm ct) = \frac{d^2}{du^2} y(u) \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x \pm ct) = \frac{d}{du} y(u) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{d}{du} y(u) \cdot (\pm c) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x \pm ct) = \frac{d^2}{du^2} y(u) \cdot c^2 \quad (9)$$

Beim Ableiten dieser Funktionen kommt die mehrdimensionale Kettenregel zum Einsatz. Dabei entspricht $\frac{d}{du} y(u)$ der „äußeren Ableitung“ und $\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$ der „inneren Ableitung“. Durch den in Glg. (6) bzw. Glg. (8) gefundenen Zusammenhang zwischen den Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t}$ mit $\frac{d}{du}$ kann die zweite Ableitung auf einfache Art und Weise bestimmt werden.

Die zweiten Ableitungen nach dem Ort bzw. der Zeit von Funktionen der Form (5) unterscheiden sich also tatsächlich nur um einen Faktor c^2 , wie der Vergleich von Glg. (7) mit Glg. (9) zeigt. Außerdem gilt dieser Zusammenhang unabhängig davon, ob $u = x + ct$ oder $u = x - ct$. Wegen dieser Unabhängigkeit sowie der Linearitätseigenschaft des Differentialoperators muss auch eine Funktion

$$y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (10)$$

die Wellengleichung lösen, wobei f und g zwei beliebige Funktionen der Form (5) sind. Diese Lösung umfasst alle existenten Lösungsfunktionen $y(x, t)$ der Wellengleichung und ist somit deren *allgemeine Lösung*. Diese Lösung wird wegen ihres Entdeckers auch als *d'Alembert'sche Lösung* bezeichnet. Ein vollständiger Beweis der Allgemeinheit dieser Lösung ist in [9] zu finden.

Setzt man nun Glg. (7) und (9) in (4) ein, muss zur Lösung der Wellengleichung $c = \sqrt{T/\epsilon}$ gewählt werden. Damit $y(x \pm ct)$ physikalisch Sinn ergibt, müssen die Terme im Argument x und ct die gleiche physikalische Einheit haben. Nach dem SI-System hat x die Einheit Meter, und t die Einheit Sekunden. Daraus folgt, dass c die Einheit Meter/Sekunde besitzen muss. Bestimmt man außerdem die Einheit von $\sqrt{T/\epsilon}$, erhält man dasselbe

Ergebnis:

$$\left[\sqrt{\frac{kg \frac{m}{s^2}}{\frac{kg}{m}}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s} \right]$$

Die Teilfunktionen der d'Alembert'schen Lösung werden auch *Wanderwellen* genannt. Dieser Name erklärt sich bei genauerer Betrachtung der Eigenschaften der Argumente $x+ct$ und $x-ct$: Gegeben sei eine Funktion $f(x-ct)$. Man betrachte dessen Funktionswert $f = f_0$ an dem Ort z.B. $x = x_0 = 0$ zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ (Beispielsweise die Spitze einer Dreiecks-Funktion). Bei nun fortlaufendem t findet man den *selben* Funktionswert f_0 (das heißt, dass das Argument von f konstant bleibt, also $x - ct \stackrel{!}{=} x_0 - ct_0 = 0$) an dem zugehörigen Ort $x = \frac{t}{c}$. Das bedeutet also, dass ein Punkt der Funktion f bei fortlaufendem Zeitindex t mit der *Geschwindigkeit* c entlang der Ortskoordinate x wandert. Nochmals zu betonen ist hier die eindeutige Verknüpfung zwischen einem Zeitpunkt t und einem Ort x durch eine Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Abb. 2 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Diese Überlegungen können analog auf g übertragen werden. Daraus ergibt sich, dass g mit der selben Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung läuft. Zusammenfassend gilt: Wird eine Saite (oder eine beliebige andere physikalische Umgebung, in der die eindimensionale Wellengleichung gilt) angeregt, breiten sich in dieser *immer* zwei Wanderwellen beliebiger Form aus, welche mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{T/\epsilon}$ in entgegengesetzte Richtungen laufen.

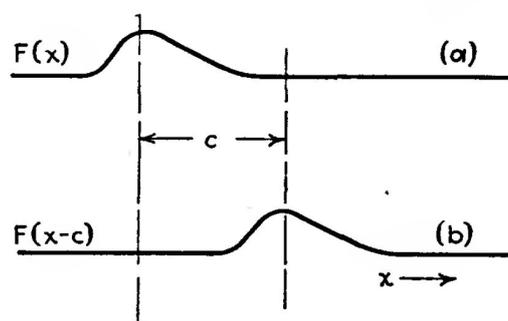


Abbildung 2: Eine bestimmte Wanderwelle $f(x-ct)$: (a): zum Zeitpunkt $t = 0$; (b): zum Zeitpunkt $t = 1$ [12]

2.3 Hintergründe zur Wellengleichung

Die Wellengleichung beschreibt das Verhalten unzähliger physikalischer Systeme. In eindimensionaler Form (analog zu Glg. (4)) beschreibt sie das akustische Verhalten von Luftröhren (welche in Blasinstrumenten von elementarer Bedeutung sind) und schwingenden Stäben (wie sie bei einigen Idiophonen verwendet werden). Ein Beispiel für das Auftreten der eindimensionalen Wellengleichung in der elektrischen Domäne sind

Wellenleiter, wie sie in der Hochfrequenz-, Nachrichten- bzw. Digitaltechnik verwendet werden. In den schwingenden Membranen und Platten eines Schlaginstruments tritt die Wellengleichung in zweidimensionaler Form auf. Für genauere physikalische Modelle existieren zahllose Variationen und Erweiterungen, von denen manche auch in den folgenden Kapiteln verwendet werden. Die nachfolgende Gleichung ist die lineare Wellengleichung dargestellt in einer allgemeinen, mehrdimensionalen Form. Vektoren sind dabei durch Fettschrift gekennzeichnet.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (11)$$

Δ bezeichnet den Laplace-Operator, c ist die bereits bekannte Ausbreitungsgeschwindigkeit, die je nach Domäne aus unterschiedlichen Parametern gebildet wird, und im allgemeinen Fall frequenzabhängig ist (siehe hierzu Abschnitt 4.2). Gemeinhin werden die Lösungen der Wellengleichung auch „Wellen“ genannt, denn die Bedeutung des Begriffs hier fällt mit dessen Bedeutung im alltäglichen Sprachgebrauch (z.B. einer Welle im Wasser) zusammen. Physikalische Größen, deren örtliche sowie zeitliche Ausbreitung der Wellengleichung allgemein gehorchen, sind beispielsweise der Schalldruck, die Schallschnelle oder die Dichte in der Akustik, oder elektromagnetische Wellen in der Elektrizitätslehre. Die Wellengleichung findet allerdings u.a. auch Anwendung in der Quantenmechanik und der allgemeinen Relativitätstheorie. Aus diesem Grund existieren auch unterschiedlichste physikalische Herleitungen, wie z.B. über die Telegraphengleichung in der Nachrichtentechnik [10] oder über grundlegende Zusammenhänge in gasförmigen Medien in der Akustik [7]. Die hier vorliegende Form ist *linearisiert*, um das Superpositionsprinzip verwenden zu können. Diese Eigenschaft wurde bereits bei der Lösung der Wellengleichung in Abschnitt 2.2 impliziert, indem die dort aufgeführten Nebenbedingungen formuliert wurden.

2.4 Eindeutige Lösung mit Anfangsbedingungen

Nun kennen wir die allgemeine Lösung der Wellengleichung. Aus der Praxis wissen wir, dass eine Gitarre „immer gleich angeschlagen immer gleich klingt“. Wissenschaftlich ausgedrückt bedeutet das, dass zu jedem Anfangszustand (Anschlagen der Saite) eine *eindeutige* Lösung der Wellengleichung (Klingen der Gitarre) existiert. Bei genauerer Betrachtung von Glg. (4) erkennt man, dass für deren eindeutige Lösung eine *Anfangsauslenkung* $y(x, 0)$ sowie eine *Anfangsgeschwindigkeit* $\frac{\partial}{\partial t}y(x, 0)$ vorzugeben ist. Dies geschieht in der Praxis, wenn z.B. die Saiten einer Gitarre gezupft ($\hat{=} y(x, 0) \neq 0$) oder die eines Klaviers mit einem Hammer angeschlagen ($\hat{=} \frac{\partial}{\partial t}y(x, 0) \neq 0$) werden. Insbesondere ist es (u.a. für die Implementierung eines Digital Waveguide, siehe 3) wichtig, den Zusammenhang zwischen den gerade genannten Anfangszuständen und den Teilfunktionen f und g der d’Alembert’schen Lösung zu kennen. Dieser Zusammenhang wird nun für allgemeine Anfangswerte gezeigt. Die Herleitung orientiert sich an [9].

Gegeben seien allgemeine Anfangswerte von $y(x, t)$:

$$y(x, 0) = a(x) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x, 0) = s(x) \quad (13)$$

Laut Glg. (10) zum Zeitpunkt $t = 0$ wird $a(x)$ also aus den beiden Wanderwellen gebildet. Wegen $t = 0$ vereinfachen sich die Argumente der Wanderwellen zu x :

$$a(x) = f(x) + g(x) \quad (14)$$

Um eine analoge Beziehung für $s(x)$ zu finden, betrachtet man die erste Ableitung von Glg. (10) nach der Zeit zum Zeitpunkt $t = 0$. Der gesuchte Ausdruck ist eine Superposition von Glg. (8) mit positivem und negativem Vorzeichen. Dabei wird zwischen $u_+ = x + ct$ und $u_- = x - ct$ unterschieden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) &= \frac{d}{du_+} g(u_+) \cdot c + \frac{d}{du_-} f(u_-) \cdot (-c) \\ \xrightarrow{t=0} s(x) &= \frac{\partial}{\partial t} y(x, 0) = c \left(\frac{d}{dx} g(x) - \frac{d}{dx} f(x) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Durch das Nullsetzen von t wird sowohl u_+ als auch u_- zu x . Um Glg. (15) nach $g(x)$ und $f(x)$ umzuformen, integrieren wir nach x :

$$\frac{1}{c} \int s(x) dx = g(x) - f(x) \quad (16)$$

Diese Rechnungen gelten für unendlich lange Saiten. Daher ist der Definitionsbereich von x die reellen Zahlen, über welchen integriert wird. Nun kann $f(x)$ durch Subtraktion bzw. $g(x)$ durch Addition der Gleichungen (14) und (16) ausgedrückt werden:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(a(x) - \frac{1}{c} \int s(x) dx \right) \quad (17)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(a(x) + \frac{1}{c} \int s(x) dx \right) \quad (18)$$

Somit lassen sich die beiden Wanderwellen der d'Alembert'schen Lösung aus den Anfangswerten berechnen. Die zugehörige Lösung der Wellengleichung (also Schwingung der Saite) besteht dann aus dem bereits oben beschriebenen Fortschreiten der Wanderwellen. Abb. 3 veranschaulicht zwei Beispiele.

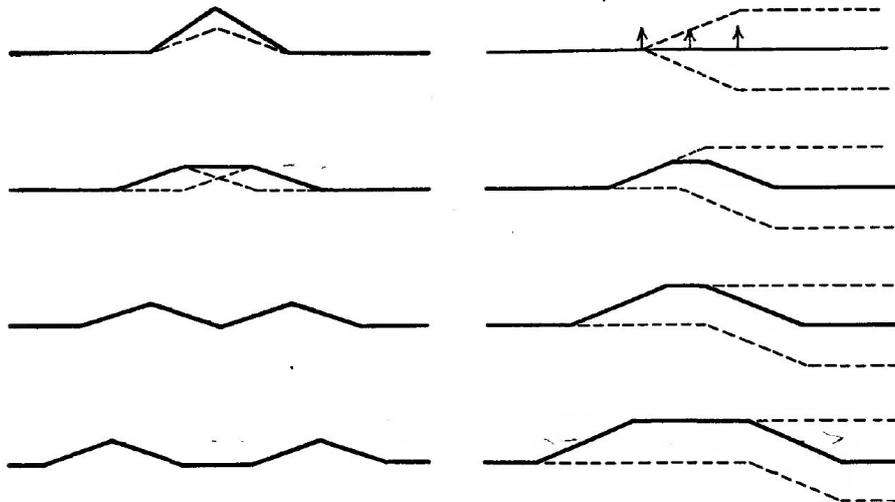


Abbildung 3: Verlauf der Welle nach bestimmten Anfangswerten zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten (von oben nach unten). Erkennbar ist die Bewegung der strichliert gezeichneten Teilwellen wie in Abb. 2. Die gesamte Auslenkung der Saite ist die Summe der beiden Teilwellen (durchgezogen gezeichnet). **links:** gezupfte Saite: Verlauf nach Anfangs-Auslenkung $\neq 0$; **rechts:** angeschlagene Saite: Verhalten nach Anfangs-Geschwindigkeit $\neq 0$ (gekennzeichnet durch Pfeilchen) [12]

2.5 Randbedingungen

Die bisherigen Überlegungen beschränken sich ausschließlich auf Saiten unendlicher Länge. Um allerdings Klänge produzieren zu können, ist es notwendig, die Länge auf einen *endlichen* Wert zu reduzieren. Mathematisch formuliert handelt es sich hierbei um die Einführung einer Randbedingung [12]. Durch eine Randbedingung fordert man von der Lösungsfunktion $y(x, t)$ ein bestimmtes Verhalten an einer bestimmten Position x_0 . Formal könnte es sich dabei um völlig beliebige Forderungen handeln, in unserem Fall beschränken sie sich jedoch auf das Nullsetzen bestimmter Positionen. Die wichtigste derartige Randbedingung wird durch das Einspannen einer Saite (endlicher Länge) in einen Steg realisiert. Ein weiteres Beispiel ist das Spielen eines Flagoletts, bei dem man die Saite punktuell an einer bestimmten Stelle mit dem Finger berührt, um gewisse Teiltöne aus dem Spektrum zu nehmen (auf das Spektrum der Klänge wird in Abschnitt 2.6 eingegangen).

2.5.1 Eine Randbedingung

Durch das Befestigen einer Saite an einem völlig unbeweglichen Steg an der Stelle $x = 0$ fordern wir von der Lösungsfunktion $y(x, t)$, dass $y(0, t) = 0$. Trifft nun eine Wanderwelle

auf diesen fixierten Punkt der Saite, wird sie reflektiert. Um eine Auslenkung von 0 zu erzwingen, „zieht“ der Steg an jener Stelle *mit genau der dafür erforderlichen Kraft* die Saite in die Ruhelage, und „generiert“ dabei selbst wiederum eine Wanderwelle. Diese bewegt sich in die entgegengesetzte Richtung, ist in ihrer Form gespiegelt zur ursprünglichen Welle und hat ein invertiertes Vorzeichen. Dieser Vorgang kann mathematisch beschrieben werden, wenn man die Lösungsfunktion $y(x, t)$ über das Ende der Saite hinaus über alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. In der „imaginären Verlängerung“ der Saite hinter dem Steg kann nun die reflektierte Welle angegeben werden, siehe Abb. 4: Genau genommen ist jetzt $f(x \pm ct)$

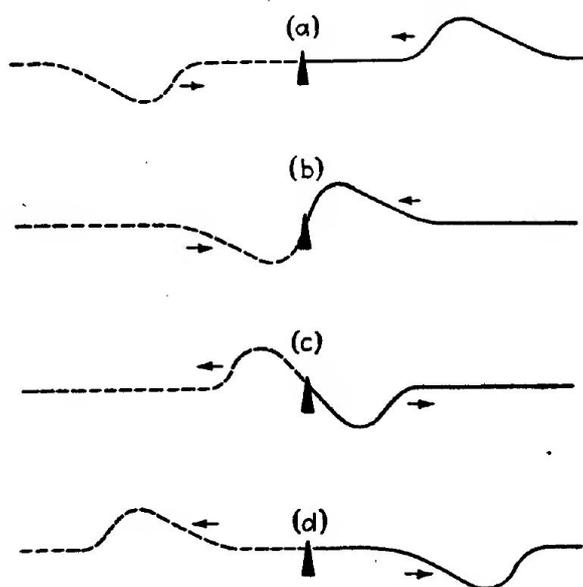


Abbildung 4: Reflexion einer Wanderwelle am Steg zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten (a) bis (d); Der strichlierte Teil stellt die virtuelle Verlängerung der Saite dar, welche zuerst die reflektierte, und dann die ursprüngliche Wanderwelle trägt. Die Saite existiert nur rechts vom Steg. [12]

keine Lösung der Wellengleichung mit Randbedingung mehr, da sie unter Umständen bei $x = 0$ ungleich Null ist. Darum ersetzt man *eine* Wanderwelle der d’Alembert’schen Lösung durch

$$f = -f_b(f - ct) + f_b(-x - ct), \quad (19)$$

was den in Abb. 4 dargestellten Wellen entspricht. An der Form der Argumente erkennt man, dass es sich bei den Teilfunktionen von Glg. (19) wieder um Wanderwellen handelt, weswegen sie Teil der von Glg. (10) bestimmten Lösungsmenge der Wellengleichung ist. Für $x = 0$ erhält man

$$f = -f_b(-ct) + f_b(-ct) = 0,$$

wie durch die Randbedingung gefordert. Eine Funktion der Gestalt (19) ist also an der Stelle $x = 0$ immer Null, da die Überlagerung der beiden Terme sich dort auslöscht. Die Beschreibung von Flagoletts ist vollständig analog, außer dass in diesem Fall die „imaginäre Verlängerung“ der Saite tatsächlich existiert.

2.5.2 Zwei Randbedingungen

Nun befestigt man auch das andere Ende der Saite an einem Steg. Bei einer Saite der Länge l befindet sich dieser an der Position $x = l$. Erzeugt man nun eine Wanderwelle, so wird diese wegen der Reflektionen an den beiden Saitenenden im Kreis laufen, und im verlustlosen Fall nie abklingen. Der hier auftretende physikalische Vorgang ist also periodisch. Bei periodischen Signalformen nehmen wir eine Tonhöhe war. Bei dem hier erzeugten Signal handelt es sich also um einen Klang. Die Wanderwelle bewegt sich mit der Geschwindigkeit c fort, also benötigt sie für eine ganze Runde auf der Saite $\frac{2l}{c}$ Sekunden, was somit der Periodendauer T von $y(x, t)$ entspricht. Die Frequenz von $y(x, t)$ ist folglich $\frac{c}{2l}$.

Mathematisch lässt sich dieses Phänomen als Erweiterung von Abschnitt 2.5.1 darstellen, indem man eine weitere ungerade Spiegelung der realen Welle an dem Ort des zweiten Stegs vorgibt, siehe Abb. 5. In dieser Darstellung ist die Lösungsfunktion $y(x, t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Da der Abstand zwischen den aufeinanderfolgenden Wellenpaketen in bzw. gegen x -Richtung $2l$ ist, ist die Periodizität von $\frac{2l}{c}$ bestätigt. Abb. 6 zeigt praxisnähere Szenarien der schwingenden Saite, wo u.a. wieder *zwei* gegenläufige Wanderwellen aus den Anfangswerten hervorgehen (Erinnerung: Abb. 5 zeigt einen Sonderfall mit lediglich *einer* zuerst nach links laufende Wanderwelle). Um die Schwingung einer Saite hörbar zu machen, muss sie aus einer mechanischen Schwingung in Luftschall umgewandelt werden. Im Fall einer Saite (z.B. im Gegensatz zu Blasinstrumenten) wird dessen Schwingung über die Stege auf den Korpus geleitet, welcher besser an die umgebende Luft gekoppelt ist. Das Prinzip ist dabei gleich dem eines Lautsprechers, welcher durch gute Kopplung an bzw. Belastung durch die umgebende Luft mechanische Energie in Schallenergie umwandeln kann. Die Physik von Lautsprechern ist Gegenstand der Elektroakustik. Ohne einem Korpus bzw. einer sog. *Abstrahlfläche* ist die Schwingung einer Saite also nicht hörbar. Im Syntheseverfahren der DWG werden derartige Kopplungen mit sog. „Waveguide-Junctions“ modelliert, wie in Abschnitt 4.3 genauer beschrieben. Ist also eine Saite an eine hinreichend gute Abstrahlfläche gekoppelt, hören wir dessen Schwingung an den gekoppelten bzw. „abgegriffenen“ Punkten der Saite $y(0, t)$ bzw. $y(l, t)$. Abb. 7 zeigt die Auslenkung der Saite in Abb. 6 an den Punkten **c**.

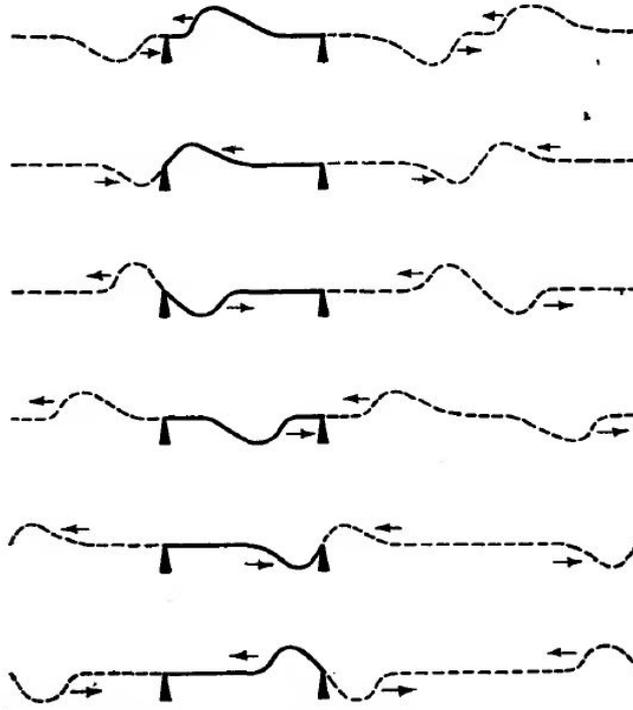


Abbildung 5: Wanderung eines Wellenpakets auf einer Saite endlicher Länge. Der Durchlauf einer Runde ist zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten dargestellt. Die Saite ist durchgezogen gezeichnet. Die modellierende Lösungsfunktion $y(x, t)$ beinhaltet auch die strichlierten Erweiterungen links und rechts der eigentlichen Saite. Durch die Randbedingungen ergibt sich für $y(x, t)$ eine nach links laufende Pulschette positiver Auslenkung sowie eine nach rechts laufende Pulschette negativer Auslenkung, jeweils im Abstand von $2l$. [12]

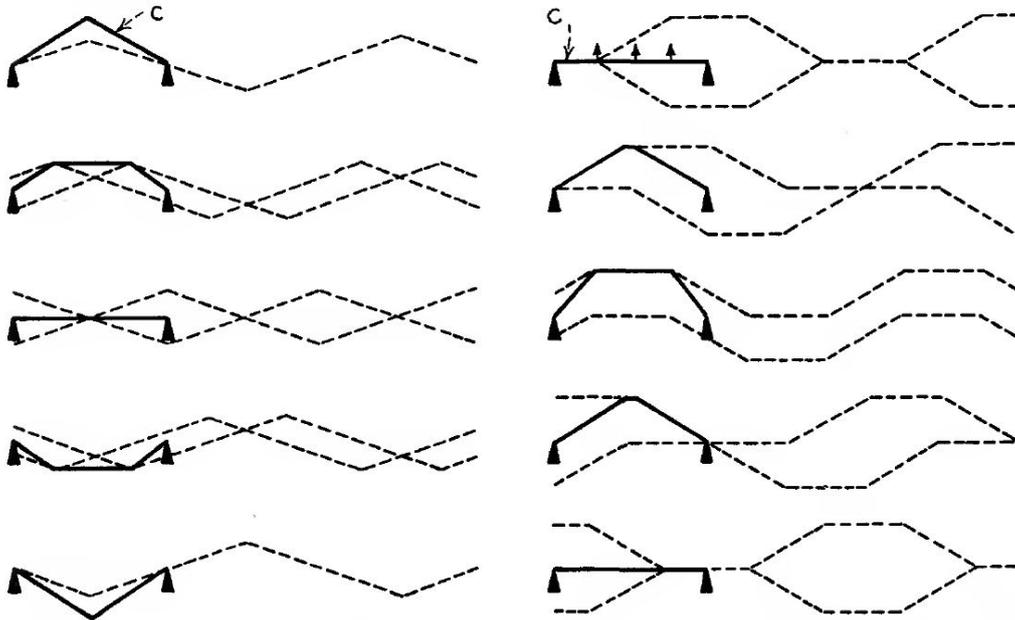


Abbildung 6: Reaktion der Saite auf die gleichen Anfangswerte wie in Abb. 3, nun allerdings inklusive der Randbedingungen, dargestellt für eine halbe Periode. Die gestrichelten Linien sind die aus den Anfangswerten berechneten Wanderwellen (siehe Glg. (17) und Glg. (18)), welche zusätzlich schiefsymmetrisch um die fixierten Punkte gespiegelt wurden, um die Randbedingungen zu erfüllen. Die sich dadurch ergebende Schwingungsform entspricht nun der „allgemeinen Vorstellung“ einer schwingenden Saite. [12]

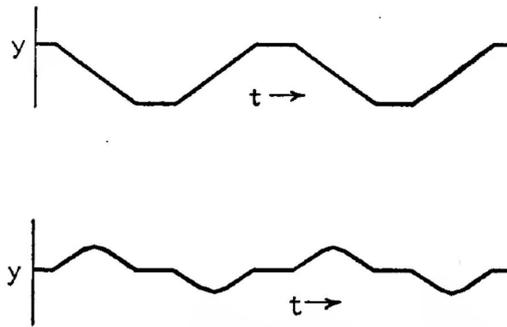


Abbildung 7: Auslenkung der Saite an den Punkten c in Abb. 6, dargestellt für zwei Perioden. **oben:** korrespondiert mit Abb. 6 links (gezupfte Saite); **unten:** korrespondiert mit Abb. 6 rechts (angeschlagene Saite); Diese Signalformen könnten beispielsweise von einem Tonabnehmer einer elektrischen Gitarre aufgezeichnet worden sein, welcher sich an der jeweiligen x -Koordinate befindet. [12]

2.6 Lösung im Frequenzbereich

Bis jetzt haben wir gezeigt, dass eine Saite bei Anregung ein periodisches Verhalten aufweist, also einen Klang produziert. Nun soll dieser Klang genauer betrachtet und quantitativ beschrieben werden. Ein Klang im akustischen Sinne ist definiert als ein Signal bestehend aus Sinusschwingungen mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen [8]. Die folgenden Überlegungen basieren auf [11] und [12]. Als Ansatz wählt man eine allgemeine harmonische Welle:

$$y_r(x, t) = A_r \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) + \phi_r \right] \quad (20)$$

mit A_r ...Amplitude von y_r

$c = \sqrt{T/\epsilon}$...Ausbreitungsgeschwindigkeit von y_r

λ ...Wellenlänge von y_r

ϕ_r ...Phasenwinkel von y_r zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = 0$

Dies entspricht einer Basisfunktion der Frequenzbereichsdarstellung. Dabei handelt es sich um eine in x -Richtung unendlich ausgedehnte harmonische, nach rechts laufende Wanderwelle mit den beschriebenen Parametern. Diese Funktion ist selbstverständlich ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung. Entsprechend einer Synthese mittels Fouriertransformation kann jede Wanderwelle $f(x - ct)$ der d'Alembert'schen Lösung durch Superposition von Glg. (20) mit geeigneten Werten für $A_{r,i}$, λ_i und $\phi_{r,i}$ der i -ten Komponente gebildet werden. Um auch die Teilwelle $g(x + ct)$ und somit die allgemeine Lösung

der Wellengleichung darstellen zu können, erweitern wir den Ansatz um eine nach links laufende Wanderwelle:

$$y(x, t) = A_r \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi_r\right] + A_l \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + ct) + \phi_l\right] \quad (21)$$

Durch Überlagerung von Glg. (21) lässt sich also die allgemeine Lösung der Wellengleichung darstellen. Um Glg. (21) für unsere Zwecke besser zu formulieren, formen wie sie unter Einführung der sog. *Wellenzahl* $k = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{1}{m}\right]$ geringfügig um:

$$y(x, t) = A_r \sin(kx - \omega t + \phi_r) + A_l \sin(kx + \omega t + \phi_l) \quad (22)$$

2.6.1 Eine Randbedingung

Nun gilt es wieder die Randbedingung $y(0, t) = 0$ zu erfüllen. Zur Vereinfachung von Glg. (22) beschränken wir uns auf den Spezialfall $A_r = A_l = A$. Für eine Lösung mit zwei Randbedingungen (siehe Abschnitt 2.6.2) ist dies ohnehin eine notwendige Einschränkung. Diese Vereinfachung impliziert, gleich wie in Abschnitt 2.5.1, dass von *idealen* Reflexionen ausgegangen wird, wo Wellen mit gleicher Amplitude reflektiert werden. Der Vergleich von hin- mit rücklaufenden Komponenten der Lösungsfunktion in Abb. 5 und 6 bestätigt diese These.

Durch genaueres Betrachten stellen wir fest, das zur Erfüllung der Randbedingung $\phi_l = -\phi_r = \phi$ gelten muss. Nur durch diese speziellen Phasenlagen löschen sich die beiden gegenläufigen Teilwellen u.a. am Punkt $x = 0$ immer aus. Abb. 8 demonstriert u.a. dieses Phänomen. Wir schreiben Glg. (22) mit den durchgeführten Einschränkungen auf:

$$y(x, t) = A [\sin(kx - \omega t - \phi) + \sin(kx + \omega t + \phi)] \quad (23)$$

Auf diese Gleichung kann die Summen-zu-Produkt Formel für harmonische Funktionen angewandt werden. Weiters verwenden wir die Symmetrieeigenschaft des Cosinus:

$$\boxed{y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi)} \quad (24)$$

Diese Gleichung beschreibt das Phänomen der *stehenden Welle*. Die Besonderheit dieser Welle besteht darin, dass Orts- und Zeitabhängigkeit getrennt in den beiden faktorisierten Winkelfunktionen auftreten. Für $x = \frac{nc}{2f}$, $n \in \mathbb{N}$ wird $\sin(kx)$ und somit auch $y(x, t)$ zu Null, und das unabhängig von t . Die Konsequenz für $y(x, t)$ sind das Auftreten von *orts-festen* Nullstellen, welche auch *Schwingungsknoten* genannt werden. Diese befinden sich in einem Abstand von jeweils $\frac{\lambda}{2}$ zueinander. Dazwischen liegen die sog. *Schwingungsbäuche*, welche durch $|\sin(kx)| = 1$ gekennzeichnet sind. Der Term $\cos(\omega t + \phi)$ lässt $y(x, t)$ an ihren beweglichen Stellen mit der Frequenz ω schwingen. Durch Einsetzen von $x = 0$ in Glg. (24) kann überprüft werden, dass wirklich an jener Stelle einer der genannten Schwingungsknoten vorliegt; Die Randbedingung ist also erfüllt. Das Entstehen einer stehenden Welle aus zwei gegenläufigen harmonischen Wellen wird in Abb. 8 veranschaulicht.

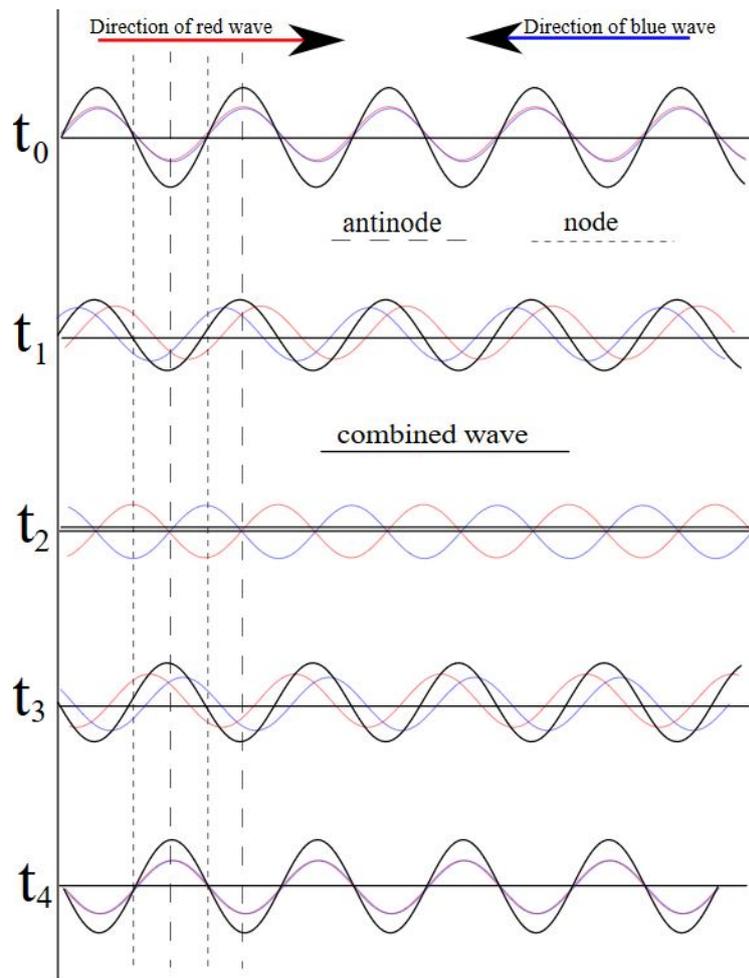


Abbildung 8: Stehende Welle als Überlagerung zweier gegenläufiger harmonischer Wellen, so wie sie z.B. durch Reflexion auftreten [3]

2.6.2 Zwei Randbedingungen

Zusätzlich zu den bisherigen Forderungen muss nun bei einer Saite der Länge l auch $y(l, t) = 0$ gelten. Damit Glg. (24) diese Bedingung erfüllt, muss $\sin(kl) \stackrel{!}{=} 0$ sein. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 kl &\stackrel{!}{=} \pi n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \\
 \text{daraus folgt mit } k &= \frac{2\pi f}{c} : \\
 f &= \boxed{f_n = \frac{nc}{2l}} \quad (25)
 \end{aligned}$$

Bei gegebenem l und c können also nur stehende Wellen mit jener Frequenz auftreten, welche Glg. (25) erfüllen. Diese Lösungsmenge wird u.a. *Teiltöne*, *Moden* oder *Eigenschwingungen* genannt [18]. Setzen wir die gefundene Bedingung für f in Glg. (24) ein, erhalten wir:

$$y_n(x, t) = 2A \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos(\omega_n t + \phi) \quad (26)$$

Bei Einführung der zweiten Randbedingung reduziert sich die Lösungsmenge *aller* stehenden Wellen (Glg. (24)) auf jene, die zusätzlich am Ort $x = l$ einen Schwingungsknoten haben. Die ersten sieben Teiltöne einer Saite sind in Abb. 9 dargestellt. Glg. (26) ist

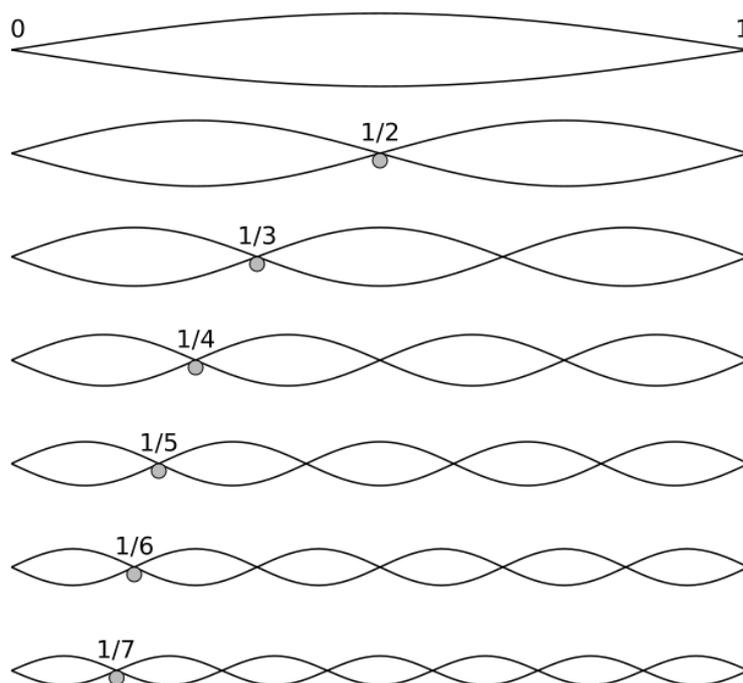


Abbildung 9: Mögliche stehende Wellen auf einer Saite endlicher Länge mit den Abständen ihrer Schwingungsknoten in Verhältnis zur l [2]

äquivalent zur in Abschnitt 2.5.2 beschriebenen Lösungsmenge: Jede mögliche Wellenform aus Abschnitt 2.5.2 kann durch Superposition von Teiltönen mit Index n durch passende Wahl für A_n , ϕ_n gebildet werden; dies entspricht der Bildung einer Fourier-Reihe in einem örtlichen Intervall von $0 \leq x \leq l$.

2.6.2.1 Analyse von Anfangswerten

Die Bildung einer Fourierreihe kann logischerweise ebenso für gegebene Anfangswerte durchgeführt werden. Aus der Analyse der Anfangswerte kann der damit erzeugte Klang-

charakter, also die Gewichtung und Phasenlage der Teiltöne bestimmt werden. Abb. 10 zeigt eine derartige Zerlegung. Dabei ist es plausibel, dass der Ort der Anregung maßgebend dafür ist, welche Teiltöne schwingen werden. Wie auch in Abb. 10 demonstriert, wird das Maximum des Anfangswerts durch Teiltöne gebildet, welche keinen Schwingungsknoten an jener Stelle besitzen. Teiltöne, welche dort allerdings einen Schwingungsknoten haben, werden überhaupt nicht angeregt. Zupft man beispielsweise eine Saite am Ort $x = \frac{l}{3}$, so wird jeder dritte Teilton (also der 3., 6., 9., usw.) vollständig aus dem Spektrum verschwinden.

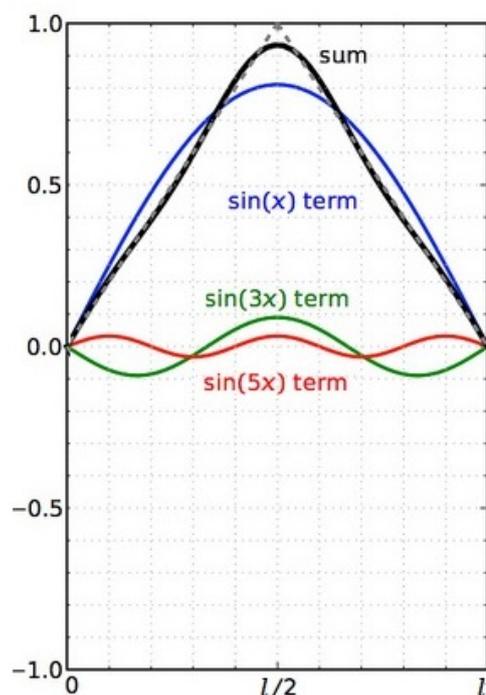


Abbildung 10: Zerlegung einer Anfangsauslenkung in Dreiecksform in die Moden der Saite. Gut zu sehen ist die unterschiedliche Gewichtung sowie der unterschiedliche Phasenwinkel der Teiltöne. Da dieser Anfangswert geradsymmetrisch um $\frac{l}{2}$ ist, werden lediglich ungerade Teiltöne angeregt. [1]

3 Digital Waveguides

Digital Waveguides sind eine Methode zur Synthese von Klängen von Musikinstrumenten. Dabei werden reale physikalische Vorgänge modelliert, wodurch sie Teil der Syntheseverfahren des Physical Modelling sind. Das Vorwissen um die Physik der Klangerzeugung wurde in Abschnitt 2 erläutert. Diese Arbeit beschränkt sich auf Saiteninstrumente; Die einzige Voraussetzung für ein Modell mittels DWG ist lediglich das Vorliegen von Wellenausbreitung. Der Vorteil von Physical Modelling ist dessen physikalische Plausibilität und die gute Steuerbarkeit der laufenden Prozesse, auch wenn das Verständnis hiervon die angesprochenen Vorkenntnisse erfordert. Das Ziel einer Klangerzeugung mittels DWG ist ein guter Kompromiss zwischen Resultaten hoher Qualität und vertretbarem Rechenaufwand.

3.1 Grundlegender Aufbau

Das Konzept der DWG setzt bei der d'Alembert'schen Lösung der eindimensionalen, verlustlosen, dispersionsfreien, linearen Wellengleichung an. Die Idee ist, dass Wanderwellen sehr einfach mit Verzögerungsgliedern implementierbar sind. Da diese Wanderwellen ihre Form nie ändern, kann ihre Signalform einfach in einen Speicher geschrieben und bei Bedarf wieder ausgelesen werden. Gut vorstellbar ist dieses Konzept unter Verwendung eines Schieberegisters, welches die Wellenform Sample für Sample weiterschiebt, genauso wie die Welle sich in der Physik mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c fortbewegt (siehe Abb. 11). Für die Komponente $f(x - ct)$ verwendet man eine „nach rechts laufende“ Delayline, für $g(x + ct)$ eine „nach links laufende“. Mit lediglich zwei Delaylines kann also Wellenausbreitung anschaulich modelliert werden. Um die Auslenkung der Saite an einem Ort zu einer bestimmten Zeit zu erfahren, werden die beiden Speicherzellen mit der korrespondierenden Koordinate addiert.

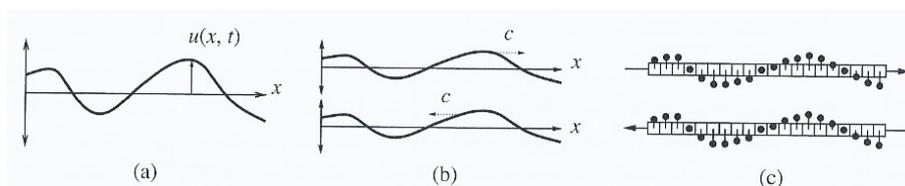


Abbildung 11: Grundkonzept von DWG: (a): bestimmte Lösungsfunktion $u(x, t)$; (b): Zerlegung der Lösungsfunktion in die beiden Wanderwellen laut der d'Alembert'schen Lösung; (c): Syntheseverfahren der DWG: Modellierung dieser Wanderwellen mittels Delaylines [6]

Dieses Modell funktioniert bis zu einer bestimmten Frequenz originalgetreu, also ohne jeglichen Informationsverlust im Vergleich zur physikalisch echten Vorlage. Begründet ist dies durch das Nyquist-Theorem: Zapft man das Signal an einem bestimmten Ort im

DWG an, so erhält man in einem bestimmten Zeitfenster eine Folge von Werten. Die Länge dieser Zahlenfolge ist von der Taktfrequenz der Schieberegister abhängig. Die Folge kann nun DA-konvertiert und über einen Lautsprecher abgespielt werden. Somit ist klar, dass die Taktfrequenz der Schieberegister z.B. $44,1 \text{ kHz}$ sein muss, damit alle für den Hörbereich relevanten Frequenzen ohne Verlust simuliert werden. Daraus ergibt sich auch automatisch eine *örtliche* Abtastung des Wellenleiters. Ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c im zu simulierenden Wellenleiter bekannt, resultiert daraus eine örtliche Abtastung in Abständen von

$$X = \frac{c}{f_s} \quad \text{mit } f_s \dots \text{ Samplingfrequenz} \quad (27)$$

Im Fall von Luftschall mit $c = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $f_s = 44,1 \text{ kHz}$ ergibt das ein örtliches Diskretisierungsintervall von $X = 7,78$ Millimeter. Mathematisch kann diese zeitliche bzw. örtliche Abtastung durch einen Übergang von zeitkontinuierlichen zu zeitdiskreten Funktionen formuliert werden. Zeitdiskrete Funktionen sind mit eckigen Klammern um deren Argument gekennzeichnet. Ein einfacher Pfeil symbolisiert einen Übergang von zeitkontinuierlichen Variablen bzw. Funktionen zu zeitdiskreten.

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x_m = mX \\ t &\rightarrow t_i = \frac{i}{f_s} \\ \Rightarrow f(x, t) &= f(x - ct) \\ &\quad \downarrow \\ f(x_m, t_i) &= f(x_m - ct_i) = f(X \cdot (m - i)) \equiv f[m - i] = f[m, i] \end{aligned} \quad (28)$$

Für $g(x, t)$ gilt analog:

$$g(x, t) = g(x + ct) \rightarrow g[m + i] = g[m, i]. \quad (29)$$

Wie bereits erklärt, ist in Analogie zu Glg. (10) die Lösungsfunktion $y[m, i]$ gegeben als

$$y[m, i] = f[m - i] + g[m + i].$$

3.2 Anfangswerte

Nun gilt es, Anfangswerte korrekt in den eben konstruierten DWG zu schreiben. Gesucht sind die Anfangszustände der beiden Wanderwellen $f[m, 0]$ und $g[m, 0]$. Da $f[m, i]$ die nach rechts laufende Wanderwelle bildet, kann deren Anfangszustand in das nach rechts laufende (obere) Schieberegister geschrieben werden (während $g[m, i]$ nach links läuft, also in die untere Delayline gespeichert wird). Gegeben sind zunächst die zeitkontinuierlichen Anfangszustände $a(x)$ und $s(x)$ laut Glg. (12) und Glg. (13). Diese werden zeitlich bzw.

örtlich abgetastet, woraus sich $a[m]$ und $s[m]$ ergeben. Das unbestimmte Integral wird mittels der Beziehung

$$S[m] = \sum_{l=0}^m s[l]$$

bzw. der äquivalenten Differenzgleichung

$$S[m] = s[m] + S[m - 1] \text{ mit } S[0] = s[0]$$

in die diskrete Domäne überführt. Es werden also die *Partialsommen* $S[m]$ zur Folge $s[m]$ gebildet. Die gesuchten Wanderwellen können mittels einer diskretisierten Version von Glg. (17) bzw. Glg. (18) bestimmt werden. Die zu implementierenden Gleichungen zur Bestimmung der Teilwellen lauten also

$$f[m] = \frac{1}{2} \left(a[m] - \frac{1}{c} \sum_{l=0}^m s[l] \right)$$

$$g[m] = \frac{1}{2} \left(a[m] + \frac{1}{c} \sum_{l=0}^m s[l] \right).$$

Die daraus erhaltenen Funktionen $f[m]$ und $g[m]$ werden in die Schieberegister geschrieben.

3.3 Randbedingungen

Randbedingungen können mit DWG äußerst simpel realisiert werden. Um eine Reflexion zu simulieren, ist es lediglich nötig, die Enden der beiden Delaylines miteinander zu verbinden. Beim Fall der schwingenden Saite, oder allgemein formuliert bei sog. „closed end boundary conditions“ muss das zwischen den Delaylines übergebene Sample zusätzlich mit -1 multipliziert werden, um die Reflexion korrekt zu simulieren, siehe Abb. 5. Bei „open end boundary conditions“, wie sie beispielsweise an der Mündung von Blasinstrumenten für die Schallschnelle auftreten, tritt kein Vorzeichenwechsel auf.

Die damit erzeugte ringförmige Struktur bewirkt die Periodizität des ablaufenden Prozesses. Bei einer Länge der Delaylines von $\frac{N}{2}$ ergibt das für die Saite (welche zwei „closed end boundary conditions“ hat, siehe unten) eine Periodendauer von N Samples bzw. eine Grundfrequenz $\frac{f_s}{N} Hz$ des generierten Klages, analog zu Abschnitt 2.5.2. Wichtig ist hier die Unterscheidung der verwendeten Funktionen: $y^+[n]$ und $y^-[n]$ in Abb. 12 bezeichnen die Speicherstellen der Delaylines mit der Adresse n , während $f[m, i]$ und $g[m, i]$ die Teilwellen der d’Alembert’schen Lösung sind. Mit $i = 0$ entsprechen sich die Funktionen $y^+[n]$ und $f[m, 0]$ bzw. $y^-[n]$ und $g[m, 0]$ mit $m = n$. Die Reflexionen werden als Übergabe von der letzten Stelle des einen Schieberegisters in die erste Stelle des anderen realisiert ($y^+[n - N/2] \rightarrow y^-[n + N/2]$ bzw. $y^-[0] \rightarrow y^+[0]$). Die Wahl der Adressen n für die Speicherzellen deutet bereits an, dass diese in der Anwendung als nur *ein* Schieberegister implementiert werden. $f[m, i]$ bzw. $g[m, i]$ werden also nicht direkt implementiert.

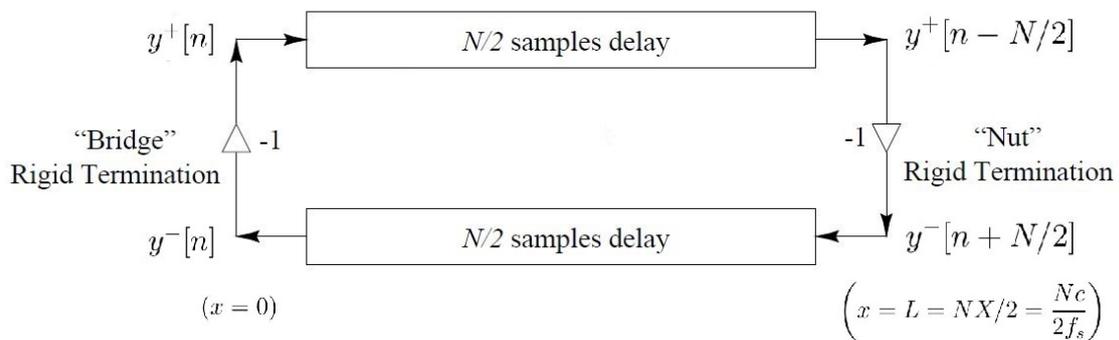


Abbildung 12: Simulation einer eingespannten Saite mittels DWG. Die Wanderwellen laufen auf zwei Delaylines der Länge $\frac{N}{2}$ im Kreis. „Closed end“ Reflexionen werden durch Vorzeichenumkehr des Samples am Ende einer Delayline realisiert. [16]

4 Erweiterungen des Modells

Nachdem ein funktionstüchtiges Grund-Modell entwickelt wurde, kann dieses weiter verfeinert und an reale physikalische Gegebenheiten angepasst werden. Im ersten Schritt werden physikalische Aspekte aufgezeigt, welche für ein realitätsnahes Ergebnis berücksichtigt werden sollten. Die zweiten Unterkapitel beschreiben die etablierten Methoden für deren Implementierung.

4.1 Verluste

Keine Saite klingt unendlich lang, denn die Energie der Schwingung geht verloren. Ein Grund dafür sind nachgiebige Stege, welche die Welle auf den Korpus weiterleiten (zur näheren Behandlung dieser Vorgänge siehe Abschnitt 4.3). Weitere Ursachen sind u.a. Reibung im Inneren der Saite und an den umliegenden Luftmolekülen. Diese teils sehr komplexen Zusammenhänge können mit Modellen unterschiedlicher Genauigkeit berücksichtigt werden. Die folgenden Erklärungen stammen hauptsächlich aus [16] und [6].

4.1.1 Frequenzunabhängige Verluste

Im einfachsten Modell werden Verluste in Form einer zusätzlichen Kraft in Richtung der Ruhelage dargestellt. In der Grundannahme ist diese proportional zur Geschwindigkeit in y -Richtung der Saite (Bereits bei der Herleitung der Wellengleichung in Abschnitt 2.1 wurde angenommen, dass sich die Saite ausschließlich in y -Richtung bewegt). Der Betrag sowie die Richtung der zusätzlichen Kraft ist also vollständig durch den Term $\mu \frac{\partial y}{\partial t}$ beschrieben, wobei $\mu \geq 0$ die Reibungskonstante ist. Durch Hinzufügen dieses Termes an Glg. (4) erhält man die *verlustbehaftete* Wellengleichung:

$$T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (30)$$

Um die Eigenlösung dieser partiellen Differentialgleichung zu finden, wählt man allgemein harmonische Wellen als Ansatz:

$$y_h(x, t) = e^{st+jkx} \quad (31)$$

Der Ansatz in Glg. (30) eingesetzt ergibt:

$$\epsilon s^2 + \mu s - \kappa k^2 = 0$$

Für s ergeben sich somit folgende Ausdrücke:

$$s_{1,2} = -\frac{\mu}{2\epsilon} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4\epsilon^2} - c_0^2 k^2} \quad (32)$$

mit $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\epsilon}}$, also der Ausbreitungsgeschwindigkeit im verlustlosen Fall. Für realistische Parameter ist $\frac{\mu^2}{4\epsilon^2} \leq c_0^2 k^2$, wodurch die Diskriminante negativ ist. Man teilt $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$:

$$\Re\{s\} = \sigma = -\frac{\mu}{2\epsilon}$$

Dadurch lässt sich diese Gleichung wie folgt interpretieren: Der Realteil von s beschreibt das Ab- bzw. Anklingverhalten der Eigenlösungen. Da dies eine Analyse der verlustbehafteten Wellengleichung ist, erwarten wir abklingendes Verhalten. Da $\Re\{s\} < 0$, wird diese Erwartung auch erfüllt. Der Imaginärteil beschreibt den schwingenden Anteil bzw. die Frequenz der Eigenlösungen. Hier fällt auf, dass ω nicht direkt proportional zu k ist. Dies lässt sich nur dadurch erklären, dass die sog. Gruppengeschwindigkeit $c(\omega) = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ abhängig von der Frequenz ist. Es liegt also *dispersive* Wellenausbreitung vor. Allerdings ist in der Regel μ sehr klein, wodurch der dispersive Anteil vernachlässigbar wird:

$$\Im\{s\} = \omega = \sqrt{c_0^2 k^2 - \frac{\mu^2}{4\epsilon^2}} \approx \sqrt{c_0^2 k^2} = c_0 k$$

Somit ist in der Praxis die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(\omega) = c_0 = c$ quasi konstant für alle Frequenzen.

Dieser Ausdruck für s kann nun in die Ansatzfunktion eingesetzt werden, um die Eigenlösung der Differentialgleichung zu erhalten:

$$y(x, t) = e^{(\sigma \pm j\omega)t + jkx} = e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon} \pm jkct + jkx} = e^{\pm \frac{\mu x}{2\epsilon c}} \cdot e^{j(\omega t \pm kx)}$$

Anmerkung: Diese Rechnungen gelten nur für kleine Auslenkungen y , wie bereits bei der Herleitung der Wellengleichung angenommen. Durch Superposition dieser Funktion mit unterschiedlichen Parametern lassen sich nun Lösungen allgemeiner Form bilden. Die Gesamtheit dieser Lösungen ist die *allgemeine Lösung* von Glg. (30):

$$\boxed{y(x, t) = e^{-\frac{\mu x}{2\epsilon c}} f(x - ct) + e^{\frac{\mu x}{2\epsilon c}} g(x + ct)} \quad (33)$$

Die allgemeine Lösung der verlustbehafteten Wellengleichung entspricht also der d'Alembert'schen Lösung (10), wobei die beiden Wanderwellen nun exponentiell mit ihrer Ausbreitung gedämpft werden. Ist die Verlust-Konstante μ allerdings sehr groß, so ergibt sich für ω ein leicht dispersiver Zusammenhang. Dieser Fall wurde, wie bereits oben erwähnt, bei der Herleitung ausgeschlossen, da er in der Praxis faktisch nie eintritt.

4.1.2 Frequenzabhängige Verluste

Genauere Modelle berücksichtigen die Frequenzabhängigkeit der Verluste. Generell nehmen diese mit der Frequenz zu. Das ist großteils den Vorgängen im Inneren der Saite sowie

der Trägheit der ankoppelnden Luft verschuldet. Aufgrund der zu hohen Komplexität ist es quasi unmöglich, diese Zusammenhänge analytisch zu beschreiben. Der Ansatz für Simulationen lautet daher eher, mit möglichst einfachen Modellen die *beobachteten* Geschehnisse möglichst genau nachzubilden. Deswegen haben sich in einem Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand unterschiedliche Modelle entwickelt. Eines dieser Modelle ist eine Erweiterung von Glg. (30) um die dritte zeitliche Ableitung der Lösungsfunktion:

$$T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \mu_3 \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t^3} \quad (34)$$

Geht man mit dieser Gleichung einen analogen Rechenweg wie mit Glg. (30) im vorigen Abschnitt, erhält man zusätzlich zum frequenzunabhängigen Dämpfungsterm $\exp(-\frac{\mu x}{2c\epsilon})$ einen frequenzabhängigen Term, welcher proportional zu ω^2 ist. Die Dämpfung ist nun also asymptotisch proportional zu ω^2 . Dies ist bereits eine gute Approximation zu dem realen Dämpfungsverhalten einer Klaviersaite, und wird z.B. im Klaviermodell von Chaigne und Askenfelt [5] verwendet. Die Simulation dieser Gleichung hat allerdings gezeigt, dass sie aufgrund der digitalen Implementierung bei hohen Frequenzen u.U. instabil wird. Aus diesem Grund verwendet man ein ähnliches Modell, welches nahezu selbe Ergebnisse liefert, und außerdem bei Simulationen immer stabil bleibt:

$$T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \quad (35)$$

Aufgrund des in Abschnitt 2.2 gezeigten Zusammenhanges zwischen x und t liefern Ableitungen nach x und nach t sehr ähnliche Ergebnisse. Aus diesem Grund ist das durch diese Gleichung erzeugte Dämpfungsverhalten nahezu ident zu Glg. (34).

Zur Lösung von Glg. (35) wählt man erneut den Exponentialansatz (31). Das daraus resultierende charakteristische Polynom lautet

$$s^2 + \left(\frac{\mu}{\epsilon} - \frac{\mu_2}{\epsilon} k^2 \right) s + c_0^2 = 0.$$

Daraus ergeben sich folgende Eigenwerte $s_{1,2}$:

$$s_{1,2} = -\frac{\mu}{2\epsilon} + \frac{\mu_2}{2\epsilon} k^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2\epsilon} - \frac{\mu_2}{2\epsilon} k^2 \right)^2 - c_0^2 k^2}$$

Wie schon im verlustlosen Fall ist die Diskriminante für den realistischen Wertebereich für μ, μ_2, ϵ negativ, wodurch wieder $s = \sigma \pm j\omega$ geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \Re\{s\} = \sigma(k) &= -\frac{\mu}{2\epsilon} + \frac{\mu_2}{2\epsilon} k^2 \\ \Im\{s\} = \omega(k) &= \sqrt{c_0^2 k^2 - \left(\frac{\mu}{2\epsilon} - \frac{\mu_2}{2\epsilon} k^2 \right)^2} \approx \sqrt{c_0^2 k^2} = c_0 k \end{aligned}$$

Im Dämpfungsterm gibt es nun zusätzlich zum frequenzunabhängigen Anteil $-\frac{\mu}{2\epsilon}$, der im Vergleich zu Glg. (32) unverändert ist, eine zu ω^2 proportionale Komponente. Mit dieser kann nun die zusätzliche Dämpfung zu hohen Frequenzen hin eingestellt werden. Ein Beispiel mit typischen Parameter-Werten ist in Abb. 13 dargestellt. Der Imaginärteil der Eigenwerte zeigt wieder leicht dispersives Verhalten. Doch auch hier ist der Klammerausdruck in der Regel sehr klein, wodurch dessen Vernachlässigung zulässig ist und somit nicht-dispersive Verhältnisse angenommen werden können ($c = c_0$). Analog zum frequenzunabhängigen Fall kann nun mit den Eigenwerten im ersten Schritt die Eigenlösung gebildet werden, welche durch beliebige Superposition schließlich die allgemeine Lösung ergibt:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= e^{\left(-\frac{\mu}{2\epsilon} + \frac{\mu_2}{2\epsilon} k^2\right)t} f(x - ct) + e^{\left(-\frac{\mu}{2\epsilon} + \frac{\mu_2}{2\epsilon} k^2\right)t} g(x + ct) = \\ &= e^{\left(-\frac{\mu}{2\epsilon c} + \frac{\mu_2}{2\epsilon c^3} \omega^2\right)x} f(x - ct) + e^{\left(\frac{\mu}{2\epsilon c} - \frac{\mu_2}{2\epsilon c^3} \omega^2\right)x} g(x + ct) \end{aligned} \quad (36)$$

Der Dämpfungsterm in Glg. (36) kann auch als Filter mittels einer Funktion der Frequenz dargestellt werden. Dafür wird dieser Term zunächst Laplace-transformiert. Liegt für bestimmte Werte von μ, μ_2, ϵ, T die imaginäre Achse im Konvergenzbereich des Laplace-Integrals, so ist der Frequenzgang dieses Filters durch Ersetzen von $s = j\omega$ gegeben. Qualitativ sieht der Filter wie folgt aus:

$$K(j\omega) = k_0 + k_2\omega^2. \quad (37)$$

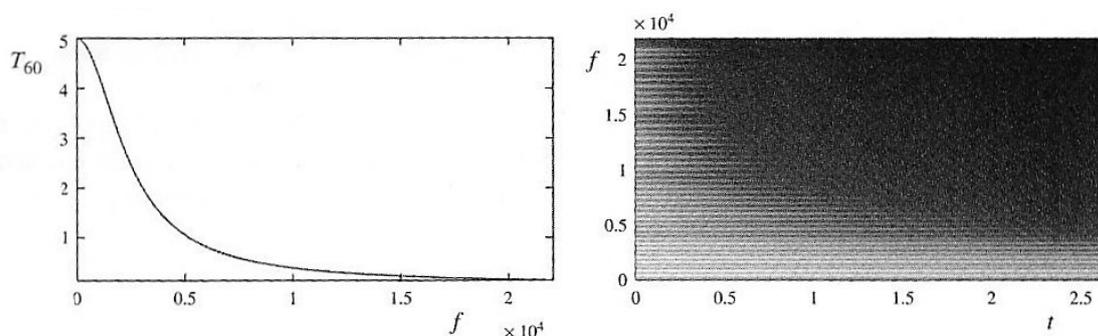


Abbildung 13: Das durch Glg. (35) erzeugte frequenzabhängige Abklingverhalten der Saite, für $\frac{\mu}{2\epsilon} = 4,870 \cdot 10^3$ und $\frac{\mu_2}{2\epsilon} = -7,665 \cdot 10^{-3}$. **links:** Die Nachhallzeit T_{60} in Sekunden in Abhängigkeit von der Frequenz. Bei 100 Hz ist $T_{60} = 5$, und bei 2000 Hz ist $T_{60} = 3$. **rechts:** Ein Spektrogramm für die gleichen Parameter wie links, mit $c = 800$ m/s [6]

4.1.3 Realisierung

4.1.3.1 Frequenzunabhängige Verluste

Ein exponentieller Abfall bzw. Anstieg der Einhüllenden entspricht einem wiederholten Multiplizieren der Wellenform mit einem konstanten Faktor. Im hier zutreffenden Fall von abklingenden Schwingungen muss dieser Faktor k kleiner 1 sein, was im nächsten Schritt auch bewiesen wird. Für einen quantitativen Zusammenhang wird Glg. (33) wie schon im verlustlosen Fall (siehe Abschnitt 3.1) abgetastet.

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &\rightarrow y(x_m, t_i) \stackrel{(33)}{=} e^{-\frac{\mu x_m}{2\epsilon c}} f(x_m - ct_i) + e^{\frac{\mu x_m}{2\epsilon c}} g(x_m + ct_i) = \\
 &\stackrel{(28),(29)}{=} \left(e^{-\frac{\mu X}{2\epsilon c}}\right)^m f[m - i] + \left(e^{-\frac{\mu X}{2\epsilon c}}\right)^{-m} g[m + i] \\
 &\implies y[m, i] = k^m f[m - i] + k^{-m} g[m + i]
 \end{aligned}$$

Ein Sample am Ort m ist also m -mal mit dem Faktor k zu multiplizieren. Dies kann bewerkstelligt werden, in dem *nach* jeder Speicherzelle eine Multiplikation mit k durchgeführt wird:

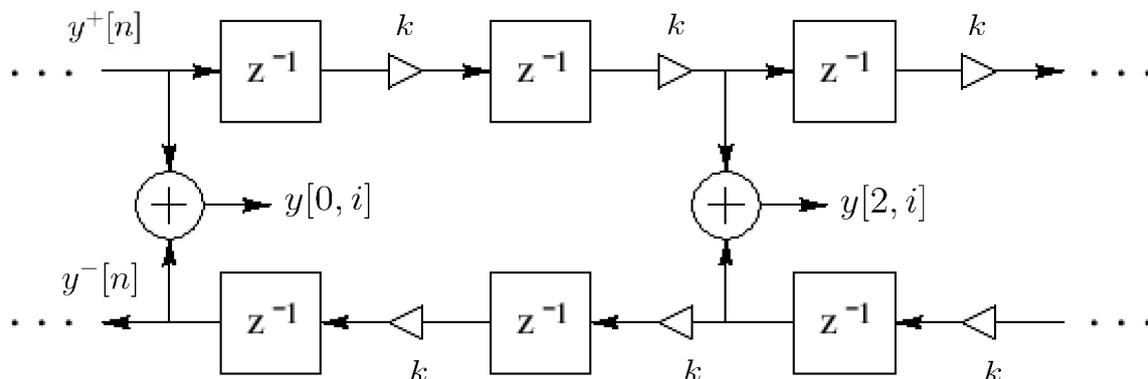


Abbildung 14: DWG mit frequenzunabhängigen Verlusten und zwei Abgriffspunkten an den Orten 0 und 2. [16]

Diese Implementierung ist allerdings sehr ineffizient: Hier kann kein Schieberegister verwendet werden, da jedes Sample mit k multipliziert werden muss, bevor es an die nächste Speicherzelle weitergereicht werden kann. Um aber ein direktes Übergeben von Samples zu ermöglichen bzw. den Ressourcenaufwand eines DWG erheblich zu senken, können dessen Eigenschaften als LZI-System ausgenutzt werden: Da sowohl Verzögerungsglieder als auch Multiplikatoren linear und zeitinvariant sind, können sie in ihrer

Anordnung im DWG vertauscht bzw. *kommutiert* werden. Damit ist es möglich, N sukzessive Multiplikationen mit k zu *einer einzigen* Multiplikation mit k^N zusammenzufassen. Um diese Zusammenfassung durchführen zu können, muss allerdings bekannt sein, wo die Abgriffspunkte im DWG liegen; an deren Ortskoordinaten m_l muss das Signal nach wie vor m_l -mal mit k multipliziert sein. Außer an den interessierenden Punkten m_l ist der DWG nun also keine exakte (bandbegrenzte) Repräsentation eines Wellenleiters mehr.

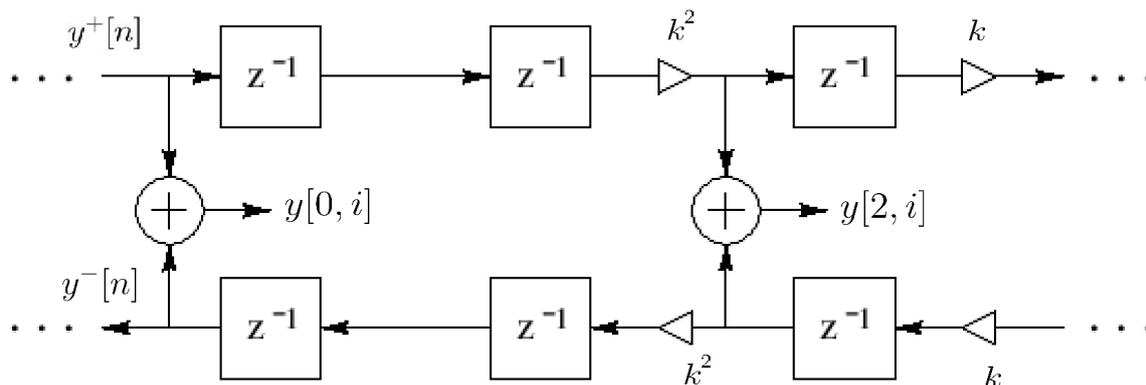


Abbildung 15: Der DWG aus Abb. 14 mit konzentrierten Multiplikatoren. Außer an den Koordinaten der Abgriffpunkte stimmen die gespeicherten Werte nicht mehr mit denen des zu modellierenden Wellenleiters überein. [16]

4.1.3.2 Frequenzabhängige Verluste

Frequenzabhängige Verluste können in Analogie zum frequenzunabhängigen Fall realisiert werden. Dafür ist lediglich eine Verallgemeinerung $k \rightarrow K(e^{j\Theta})$ notwendig. Die Abtastung der allgemeinen Lösung verläuft analog zum frequenzunabhängigen Fall. Das zu implementierende zeitdiskrete Dämpfungsfilter $K(e^{j\Theta})$ wird dem zeitkontinuierlichen Pendant $K(j\omega)$ (siehe Glg. (37)) unter bestimmten Gesichtspunkten angenähert, wie im Folgenden noch genauer erklärt wird. Bei $K(e^{j\Theta})$ handelt es sich um ein Filter mit Tiefpass-artigen Eigenschaften. Anstelle der Multiplizierer sind nun Filter zwischen die Speicherzellen geschaltet, siehe Abb. 16. Der passende Filter $K(e^{j\Theta})$ wird durch Approximation des Amplitudenganges $|K(j\omega)|$ entworfen. Dabei muss beachtet werden, dass $|K(e^{j\Theta})| < 1$ ist, da sonst der DWG u.U. instabil wird. Bisher wurde außerdem der Phasengang der Filter nicht berücksichtigt. In den bisherigen Überlegungen wurden die Filter als nullphasig angenommen, was natürlich aufgrund der Echtzeitanwendung nicht umsetzbar ist. Die Realisierung der Filter sollte allerdings linearphasig sein bzw. eine konstante Gruppenlaufzeit haben, um die grundsätzliche Signalförmigkeit nicht zu verfälschen. Die Konsequenz einer nicht-konstanten Gruppenlaufzeit wäre eine Realisierung von dispersiver Wellenausbreitung. Dieser Effekt wird in Abschnitt 4.2.1 bewusst ausgenutzt. Aus diesem Grund verwendet man hier FIR- bzw. quasi-linearphasige IIR-Filter.

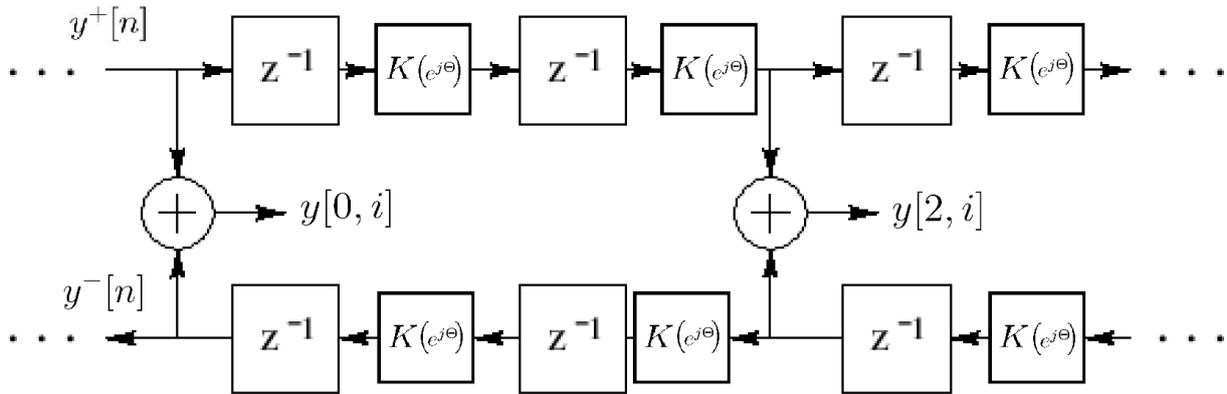


Abbildung 16: DWG mit frequenzabhängigen Verlusten. Die Art der Dämpfung wird vom Amplitudengang der Filter $K(e^{j\theta})$ bestimmt. [16]

Diese Filter sind LZI-Systeme, wodurch sie ebenfalls auf einzelne Punkte im DWG konzentriert werden können. Somit hat das konzentrierte Filter einen Frequenzgang $K^N(e^{j\theta})$ mit N als Länge des DWG.

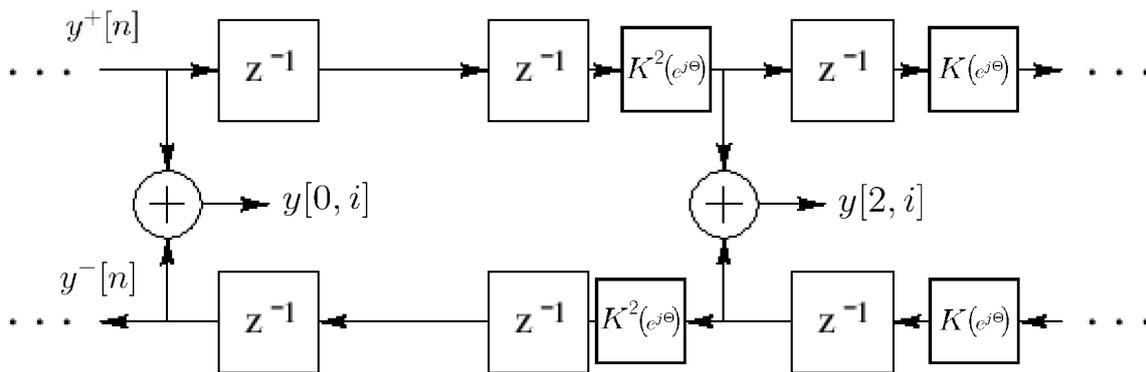


Abbildung 17: DWG aus Abb. 16 mit konzentrierten Filtern $K^2(e^{j\theta})$ zur Minimierung des Rechenaufwandes. [16]

Die Gruppenlaufzeit der Filter muss kompensiert werden, um die Periodendauer des DWG nicht zu verlängern bzw. die damit generierte Frequenz zu erniedrigen. Dies wird bewerkstelligt, indem man jene Anzahl von Verzögerungsgliedern aus der Schleife entfernt, welche der Gruppenlaufzeit der Filter in Samples entspricht.

4.2 Dispersion

Bei der verlustlosen schwingenden Saite wurden bisher nur Kräfte berücksichtigt, welche eine Konsequenz der Saitenspannung T sind, siehe Abb. 1. Wenn man allerdings eine Saite *verbiegt*, so wird diese nach dem Loslassen wieder in ihre gerade Form zurückspringen. Eine Saite ist also *biegesteif*. Die Biegesteifigkeit ist eine Quelle weiterer Kräfte, welche die Schwingung der Saite maßgeblich beeinflusst. Stark vereinfacht kann der Effekt der Biegesteifigkeit auf den Durchmesser der Saite zurückgeführt werden [15]: Man betrachtet ein *Bündel* von Saiten *infinitesimalen Durchmessers*, welches *eine* Saite mit einem bestimmten Durchmesser bildet. Verbiegt man nun dieses Bündel, werden einzelne Stränge gedehnt, und andere gestaucht. Die Konsequenz sind rüctreibende Kräfte entlang der Biegung. Eine biegesteife Saite ist dispersiv, was in den folgenden Rechenschritten demonstriert wird.

Die Wellengleichung einer biegesteifen Saite lautet approximiert:

$$\epsilon \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \kappa \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} \quad (38)$$

Dabei ist κ das Produkt des *Young Modulus* und des *Flächenträgheitsmoments*, welches u.a. in der Festigkeitslehre eine entscheidende Rolle spielt. Als Lösungsansatz arbeiten wir mit allgemein komplexen harmonischen Wellen:

$$y_h(x, t) = e^{st+jkx}$$

Durch Einsetzen des Ansatzes vereinfacht sich Glg. (38) zu:

$$\epsilon s^2 = T(jk)^2 - \kappa(jk)^4 = -Tk^2 - \kappa k^4.$$

Für sehr niedrige Frequenzen ist auch die Wellenzahl k klein; in diesem Fall ist k^4 im Vergleich zu k^2 vernachlässigbar, und es gilt näherungsweise:

$$\epsilon s^2 \approx -Tk^2 \implies k = \pm \frac{s}{j\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}} = \pm \frac{s}{jc_0}. \quad (39)$$

Mit $s = j\omega$ gilt schlussendlich

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0}. \quad (40)$$

Bei tiefen Frequenzen verhält sich die biegesteife Saite wie die ideale. Durch Vernachlässigung des Termes κk^4 wird Glg. (38) nämlich wieder zur idealen Wellengleichung (4). Dass die ideale Saite nicht dispersiv ist, zeigt Glg. (40), da k direkt proportional zu ω ist. Für hohe Frequenzen ist k^4 viel größer als k^2 , wodurch für Glg. (39) näherungsweise gilt:

$$\epsilon s^2 \approx -\kappa k^4 \implies k = \pm \sqrt[4]{\frac{\epsilon}{\kappa}} \sqrt{\pm js}$$

$$\stackrel{s=j\omega}{\implies} k = \pm \sqrt[4]{\frac{\epsilon}{\kappa}} \sqrt{\mp\omega}$$

Das obige Ergebnis beweist, dass bei hohen Frequenzen *die Ausbreitungsgeschwindigkeit abhängig von der Frequenz ist*. Weiter verdeutlicht wird dies durch folgende Umformung:

$$\begin{aligned} k &\equiv \frac{\omega}{c(\omega)} = \pm \sqrt[4]{\frac{\epsilon}{\kappa}} \sqrt{\mp\omega} \\ \implies c(\omega) &= \frac{\pm\omega}{\sqrt{\mp\omega}} \sqrt[4]{\frac{\kappa}{\epsilon}} \end{aligned} \quad (41)$$

Zu hohen Frequenzen steigt $c(\omega)$ also an. Wellen auf einer biegesteifen Saite sind also *dispersiv*. Glg. (40) hingegen zeigt nach selbiger Umformung, dass c unabhängig von ω ist, was nicht-dispersiver Wellenausbreitung entspricht. Untersucht man das Verhalten von Wellen in einem vibrierenden Stab oder Barren, erhält man das *selbe* Ergebnis wie Glg. (41). In jenem Fall ist Wellenausbreitung überhaupt erst durch Elastizität möglich, welche die für Dispersion verantwortlichen rücktreibenden Kräfte zwangsläufig mit sich bringt.

Für eine allgemeine Frequenz bzw. für Frequenzen um $k = 1$, wo keiner der beiden Terme vernachlässigbar ist, ergibt sich für $c(\omega)$ folgender Zusammenhang [16]:

$$c(\omega) = c_0 \left(1 + \frac{\kappa\omega^2}{2Tc_0^2} \right) \quad (42)$$

Dabei ist c_0 wieder die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die nicht-biegesteife Saite, also $\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}$. Der Graph zu Glg. (42) ist in Abb. 18 gezeichnet.

Die Konsequenz von Dispersion für den Klang ist die *Zerstörung der Harmonizität der*

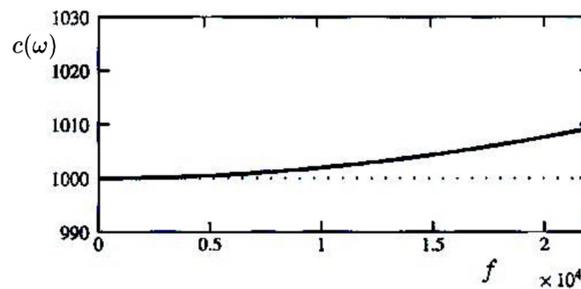


Abbildung 18: Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(\omega)$ in Abhängigkeit von der Frequenz f mit $c_0 = 1000 \frac{m}{s}$ und $\frac{\kappa}{\epsilon} = 1$. Die strichlierte Linie beschreibt $c = c_0$ für eine Saite ohne Biegesteifigkeit. [6]

Teiltöne. Die Frequenz der n -ten Mode ist gegeben durch Glg. (25). Nimmt nun allerdings $c(\omega)$ frequenzabhängig zu, so steigt auch f_n . Das Resultat ist, dass hohe Teiltöne etwas

über den ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz klingen. Somit ist kein exakt harmonisches Teiltonspektrum mehr gegeben. Im Umkehrschluss bedeutet dies allerdings, dass das zum Spektrum gehörige Zeitsignal gar nicht mehr periodisch ist. Dies ist plausibel, da die Gestalt der Auslenkung der Saite sich niemals wiederholt. Beispielsweise ist im nicht-dispersiven Fall ein Rechteck-förmiger Anfangszustand zu den Zeitpunkten nT in exakt gleicher Form als Auslenkung wiederzufinden (siehe Abb. 6). Im dispersiven Fall hingegen tritt die selbe Gestalt nie mehr wieder auf, denn der Anfangszustand „zerfließt“ bzw. *dispergiert* mit der Zeit. Speziell bei steilen Flanken ist dieser Effekt gut beobachtbar, da zur Bildung dieser viele hochfrequente Anteile in exakter Zusammensetzung notwendig sind. Aus Sicht der Mathematik ist das Zeitsignal nun also nur mehr quasi-periodisch, welches allerdings aufgrund psychoakustischer Effekte nach wie vor als Klang wahrgenommen wird. Dispersive Saiten sind der Grund, warum Saiteninstrumente, insbesondere das Klavier, beim Stimmen „gestreckt“ werden. Dort werden die zu stimmenden Oktaven gespreizt, also etwas größer als das ideale Frequenzverhältnis von 1:2 gestimmt. Dadurch werden störende Dissonanzen von ideal gestimmten Oktaven (also im Frequenzverhältnis 1:2) mit überhöhten Obertönen, welche durch Dispersion entstehen, vermieden.

4.2.1 Realisierung

Unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten können mit unterschiedlichen Laufzeiten in den Verzögerungsgliedern realisiert werden. Anstatt Speicher zu verwenden, welche Samples für *einen* Taktzyklus $T = \frac{1}{f_s}$ Sekunden zwischenspeichern, sollen Verzögerungsglieder das Signal *frequenzabhängig* um $\frac{c_0}{c(\omega)}$ Taktzyklen verzögern. Dies ist eine rein theoretische Überlegung, da natürlich nur Zeiten $\frac{c_0}{c(\omega)}$ realisiert werden können, welche ganzzahlige Vielfache der Sampling-Periode T sind. Durch weiter unten erklärte Modifizierungen kann dieses Konzept dennoch angewandt werden. Das eben beschriebene Verhalten kann mit *Allpässen* erreicht werden. Deren entscheidende Größe ist dabei die sog. *Phasenverzögerung* in Sekunden, welche wie folgt definiert ist:

$$P(\omega) = -\frac{\arg\{H(j\omega)\}}{\omega} \quad (43)$$

Hier ist $H(j\omega)$ der Frequenzgang eines allgemeinen zeitkontinuierlichen Systems. Die Phasenverzögerung der Allpässe muss so dimensioniert werden, das gilt:

$$P_a(\omega) = T \frac{c_0}{c(\omega)} \quad (44)$$

Dabei ist $c(\omega)$ durch Glg. (42) gegeben. Diese Allpässe werden nun an die Stellen der Speicherelemente in Abb. 11 (c) bzw. Abb. 12 gesetzt, wodurch sich folgende Struktur ergibt:

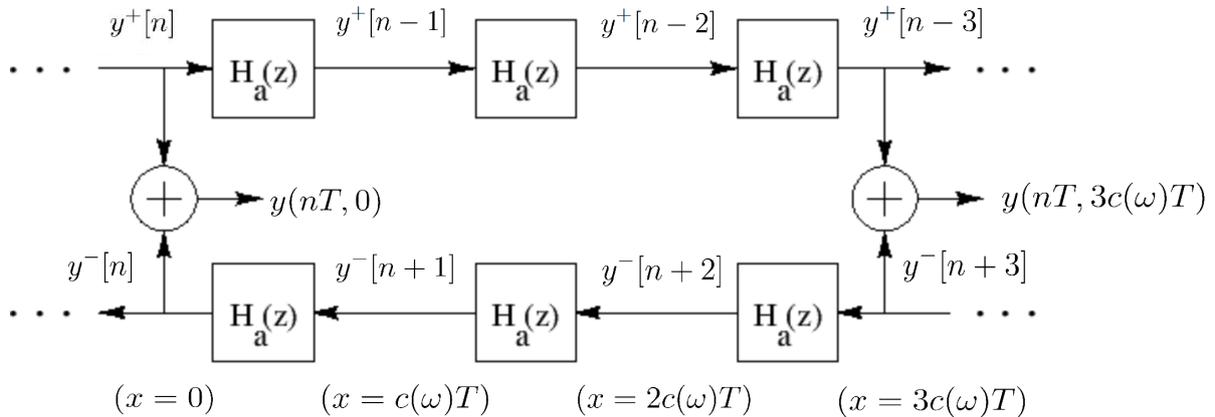


Abbildung 19: Strukturbild zur Simulation einer biegesteifen Saite. Die Speicherzellen wurden durch Allpässe ersetzt. [16]

Allpässe sind lineare und zeitinvariante Systeme, weswegen sie in der Reihenfolge ihrer Anwendung vertauscht bzw. vereint werden können. Sind die Abgriffspunkte am DWG bekannt und festgelegt, was im Fall von Saiten immer zutrifft, können alle Allpässe $H_a(z)$ zu zwei Allpässen $H_b(z) = H_a^N(z)$ zusammengefasst werden, wobei der DWG N Samples lang ist. Dies reduziert einerseits die Anzahl der zu implementierenden Allpässe um $2N$, andererseits ist nun das vorhin erwähnte Problem, dass lediglich diskrete Verzögerungszeiten realisiert werden können, praktisch umgangen. Die Anwendung dieser Umformung auf Abb. 19 sieht wie folgt aus: Um DWGs über Waveguide-Junctions

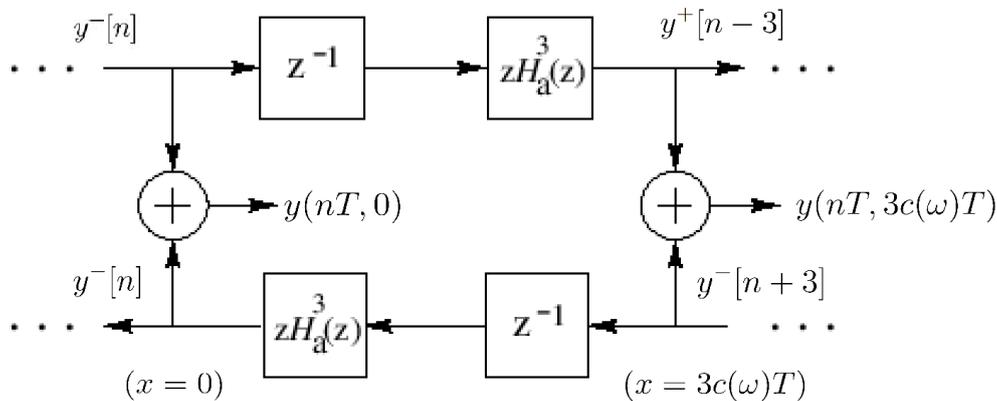


Abbildung 20: Strukturbild mit zusammengefassten Allpässen zur Reduktion des Rechenaufwandes und Erhöhung der erreichbaren Genauigkeit. [16]

aneinander koppeln zu können, wird pro Richtung eine Speicherzelle benötigt. Diese wurden aus der Übertragungsfunktion der Allpässe herausgehoben, wie in Abb. 20

dargestellt. Das resultierende Filter kann nun mittels Annäherung der gewünschten Phasenverzögerung entworfen werden.

4.3 Verbindung von Wellenleitern

Eine schwingende Saite allein erzeugt keinen wahrnehmbaren Schall. Im Fall eines Klaviers entsteht dieser erst durch Kopplung mit dem Korpus, welcher mit seinen Charakteristika die angrenzende Luft in Schwingung versetzt. Nur diese Luftdruckschwankungen sind ein hörbarer Klang für uns. Im Prinzip handelt es sich hier um eine Verkettung bzw. noch allgemeiner formuliert eine Vernetzung verschiedener Wellenleiter, welche mit DWGs mehr oder weniger detailgetreu simuliert werden kann. Ein weiteres, konkreteres Beispiel hierfür ist die Interaktion eines Saiten-Doppels oder Saiten-Tripels für die Erzeugung *eines* Klanges beim Klavier: Hier werden aneinander gekoppelte Saiten ganz leicht gegeneinander verstimmt; Das Resultat ist ein außergewöhnlicher, jedoch für das Klavier unverkennbarer Lautstärkenverlauf im Ausschwingverhalten des Klanges [17]. Abgesehen von ihrer örtlichen Ausdehnung (z.B. Dimension) werden Wellenleiter durch ihren *Wellenwiderstand* Z sowie der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(\omega)$ in ihm charakterisiert [4]. Im Fall der verlustlosen schwingenden Saite ist der Wellenwiderstand als

$$Z_{\text{Saite}} = \frac{F_W(x, t)}{v(x, t)}$$

gegeben. Dabei ist $F_W(x, t)$ die sich auf der Saite ausbreitende *Kraftwelle* in y -Richtung (F wie „Force“; Die Fußnote W wie „Welle“ soll die Unterscheidung zur Komponente $f(x, t)$ der d'Alembert'schen Lösung verdeutlichen), und $v(x, t)$ die sich auf der Saite ausbreitende *Geschwindigkeitswelle* in y -Richtung. Der Zusammenhang zur bisher verwendeten d'Alembert'schen Lösung der *Auslenkung* $y(x, t)$ lautet:

$$F_W(x, t) = T \left(\frac{dg(x + ct)}{dt} - \frac{df(x - ct)}{dt} \right)$$

$$v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = c \left(\frac{dg(x + ct)}{dt} - \frac{df(x - ct)}{dt} \right)$$

Die Herleitung von $F_W(x, t)$ kann in [16] nachgelesen werden, die Bildung der Ableitung $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$ folgt Glg. (8). Aus den obigen Beziehungen kann man erkennen, dass

$$Z_{\text{Saite}} = \frac{T}{c} = \sqrt{T\epsilon} = \epsilon c$$

ist. Mit dem nun bekannten Wert für Z_{Saite} weiß man, wie eine Saite z.B. an den Resonanzkörper koppelt. Es ist sinnvoll, anstatt der Auslenkung $y(x, t)$ die Kraft $F_W(x, t)$

in einem DWG zu simulieren, da Kraft in einer Kopplung von Festkörper mit Luft in Schalldruck übersetzt wird, welcher letztlich von uns wahrgenommen wird. Außerdem existieren in jeder sog. *Domäne* (elektrisch, mechanisch sowie akustisch) zu Kraft und Geschwindigkeit analoge Größen.

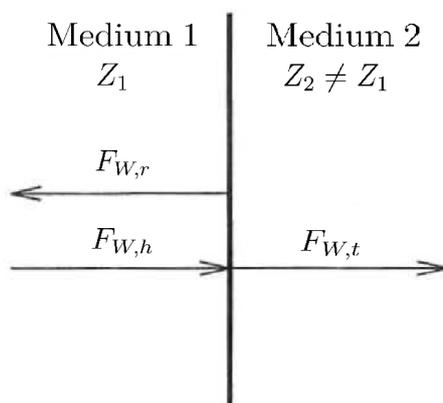


Abbildung 22: Teilreflexion einer Kraftwelle beim Mediumswechsel, wie er z.B. bei der Kopplung einer Saite mit dem Korpus auftritt. Die hinlaufende Welle wird in eine reflektierte und eine transmittierte Welle aufgespalten. [7]

Bei der Aneinanderreihung zweier Wellenleiter entscheiden deren Wellenwiderstände über das Ausmaß von Transmission und Reflexion einer hinlaufenden Welle. Eine daraus abgeleitete Größe ist der sog. *Reflexionsfaktor* ρ . Für eine Potentialgröße, die im Fall von mechanischen Systemen F_W ist, gilt:

$$\rho = \frac{F_{W,r}}{F_{W,h}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (45)$$

Eine genauere Aufarbeitung dieser Grundlagen kann u.a. in [7] nachgelesen werden. Grundsätzlich muss die Summe aller Kräfte immer stetig sein, damit an der Trennfläche keine Kraftdifferenz auftritt. Weiters muss beim hier behandelten verlustlosen Fall die Leistung konstant bleiben, welche durch $F_W \cdot v$ gegeben ist. Deswegen gilt:

$$F_{W,h} = F_{W,r} + F_{W,t}$$

Somit können $F_{W,r}$ und $F_{W,t}$ aus $F_{W,h}$ und ρ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} F_{W,r} &= \rho F_{W,h} \\ F_{W,t} &= (1 + \rho) F_{W,h} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich einfach in die zeitdiskrete Domäne überführen, wo sie zur Kopplung von DWGs verwendet werden können:

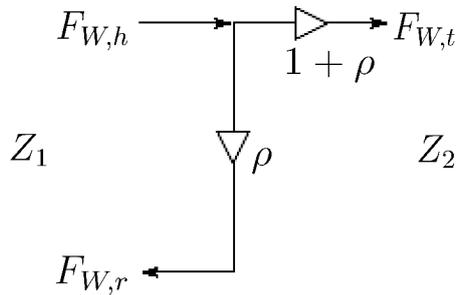


Abbildung 23: Signalflussgraph für die Realisierung einer Teilreflexion. [16]

Um auch Teilreflexionen von Z_2 nach Z_1 simulieren zu können, wird Abb. 23 um seine gespiegelte Anordnung ergänzt. Bei Vertauschen von Z_1 und Z_2 in Glg. (45) ergibt sich $\rho_{Z_2 \rightarrow Z_1} = -\rho$. In Summe ergibt dies folgenden Signalflussgraphen:

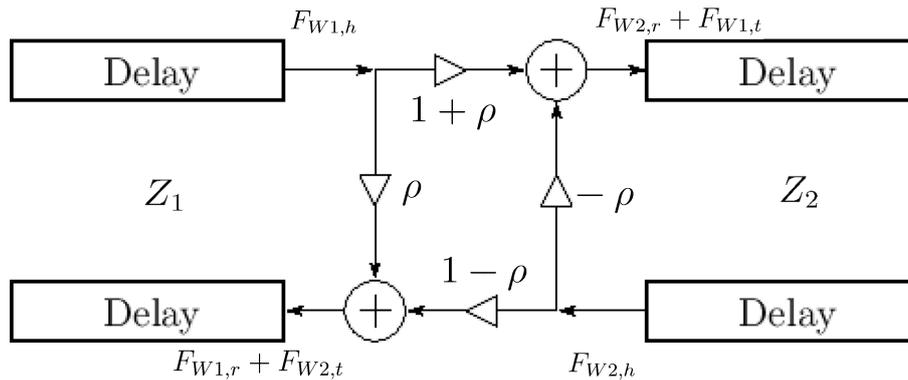


Abbildung 24: Eine sog. „DWG-Junction“ als Koppelglied zweier DWGs. Zur vollständigen Beschreibung einer Teilreflexion bzw. eines Mediumswechsels wird lediglich der Reflexionsfaktor ρ benötigt. [16]

Mit solchen DWG-Junctions lassen sich nun beliebig komplexe Verknüpfungen von Wellenleitern bauen und simulieren.

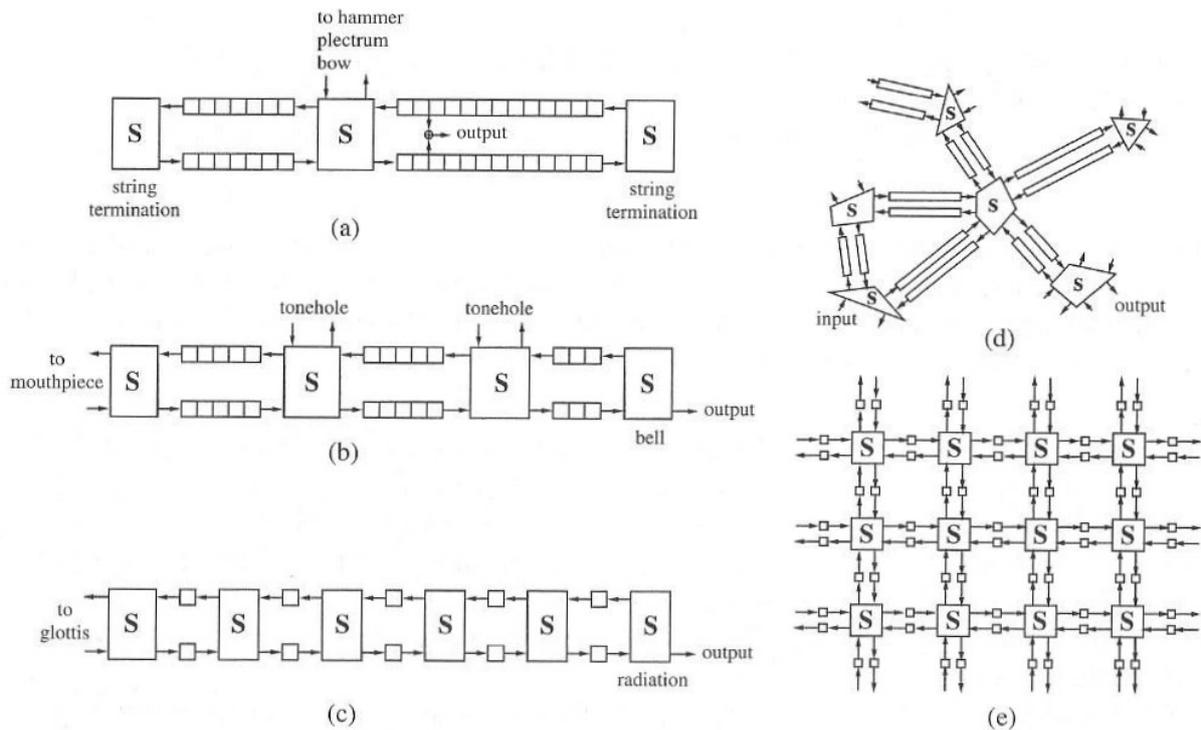


Abbildung 21: DWG-Netzwerke für die Simulation unterschiedlicher Instrumente bzw. Effekte; Die Koppelglieder sind mit **S** (für „Scattering“) bezeichnet, sog. „DWG-Junctions“, welche der Modellierung von Mediumswechsel dienen. **(a):** Schwingende Saite (ohne zugehörigen Resonanzkörper) mit einem Anregungspunkt in der Mitte, zwei Junctions für die Stege sowie einem Abgriffspunkt (z.B. Tonabnehmer einer E-Gitarre); Die bisher behandelten Beispiele hatten im Prinzip diese Struktur. **(b):** Holzblasinstrument mit Koppelgliedern zum Generator (Mundstück), Schallbecher und Grifflochern; **(c):** Menschlicher Vokaltrakt mit Junctions zwischen Teilstücken der Luftröhre unterschiedlichen Durchmessers (und daher unterschiedlichen Wellenwiderstandes); **(d):** zufälliges DWG-Netz, welches sich zur Synthese von Nachhall-Effekten eignet; **(e):** Zweidimensionales DWG zur Simulation von Wellenausbreitung in Platten und Membranen [6]

5 Abschluss

5.1 Zusammenfassung

Diese Bachelorarbeit beschreibt die grundlegenden Konzepte von Klangsynthese mittels Digital Waveguides, welche zur Kategorie des Physical Modelling zählen. Die Überlegungen beziehen sich auf das Beispiel der schwingenden Saite, welche ein Medium für Wellenausbreitung ist. Begonnen wurde mit der Herleitung der Wellengleichung, aus welcher auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen hervorging. Diese ist eine der charakterisierenden Größen von Wellenleitern. Im Anschluss wurde die allgemeine, genannt *d'Alembert'sche Lösung* gefunden und interpretiert. Hier stand der Begriff der „Wanderwelle“ im Zentrum, auf welchem auch das Konzept der DWG beruht. Danach wurde in einem kleinen Exkurs zur Wellengleichung deren Allseitigkeit betont, da sie in unterschiedlichsten Umgebungen in unterschiedlichsten Formen und Dimensionen anzutreffen ist. Um sie eindeutig lösen, und somit konkrete physikalische Geschehnisse modellieren zu können, wurden Anfangszustände eingeführt. Die gefundenen Beziehungen zwischen Anfangszustand und Wanderwelle wurden auch in späteren Überlegungen zur digitalen Realisierung benötigt. Mit Randbedingungen wurde eine Saite endlicher Länge erwirkt, die nun ein periodisches Verhalten aufwies. Durch eine Fourier-Reihenentwicklung der Lösungsfunktion konnte dieser Klanges auch analysiert werden. Abschnitt 3 handelt von DWG als Simulation der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Effekte. Durch Abtastung ist eine bandbegrenzt exakte Repräsentation von Wellenleitern möglich, wobei lediglich Schieberegister und simple Rechenoperationen benötigt werden. Anfangswerte werden in vollständiger Analogie zum physikalisch realen Pendant eingebracht. Eine ringförmige Struktur, bestehend aus zwei Schieberegistern, bewirkt das periodische Verhalten, wobei Reflexionen im Fall von Saiten mit einer zusätzlichen Vorzeichenumkehr bewerkstelligt werden. Das Modell wurde schlussendlich um Verluste sowie Dispersion erweitert. Da eine exakte physikalische Beschreibung für unsere Zwecke nicht notwendig ist, wurden stattdessen aus *Beobachtungen* möglichst simple mathematische Muster abgeleitet, welche als zusätzliche Terme an die bereits bekannte Wellengleichung angehängt wurden. Deren Analyse bewies die von uns geforderten Eigenschaften, also konnten Verluste sowie Dispersion durch passende Konversion ins das Grundmodell der DWG eingebunden werden. Durch das Zusammenfassen von Multiplizierern, linearphasigen Filtern und Allpässen konnte der Rechenaufwand erheblich gesenkt werden. Dabei entfernten wir uns allerdings von einer exakten Repräsentation eines Wellenleiters hin zu einer praktischen Synthesemethode. Zum Abschluss wurde auf die Verbindung von Wellenleitern eingegangen. Neben der Auslenkung existieren noch andere physikalisch relevante *Wellenvariablen*, wie z.B. die Kraft oder Geschwindigkeit. Der *Wellenwiderstand* beschreibt deren Zusammenhang und macht somit Wellenleiter miteinander „vergleichbar“; somit ist sie neben der Ausbreitungsgeschwindigkeit die zweite charakterisierende Größe eines Wellenleiters. Über den

daraus abgeleiteten *Reflexionsfaktor* kann eine sog. *DWG-Junction* konstruiert werden, welche nun als Koppelglied zwischen zwei DWGs zur Verfügung steht.

5.2 Diskussion und Ausblick

Die größte Herausforderung beim Verfassen dieser Arbeit bestand für mich in der Auswahl des relevanten Stoffes. Die Physik der schwingenden Saite ist ein sehr grundlegendes und daher sehr gut dokumentiertes Kapitel der Physik. Es ist also sehr verleitend, mit aller Ausführlichkeit in dieses Thema einzutauchen. Wie der Name der Arbeit allerdings schon sagt, ist dessen Fokus ein Verfahren der Klangsynthese. Da dieses wiederum auf der Modellierung physikalischer Geschehnisse basiert, gilt es für den Inhalt der Arbeit ein gewisses Gleichgewicht zwischen physikalische Grundlagen und Methodik der Klangsynthese zu finden. Zudem soll die Arbeit inhaltlich möglichst geschlossen sein, also den gesamten „Weg“ von der Physik bis hin zur fertigen Schaltung gehen und abdecken. In der ersten Version meiner Arbeit wollte ich beispielsweise die Wellengleichung als gegeben annehmen, ohne eine Herleitung zu nennen. Ich versuchte weiters, einen DWG in MATLAB zu entwerfen, *bevor* ich mich überhaupt mit der zugrundeliegenden Physik auseinandersetzt habe; Dies verursachte lediglich viel Frust und bewies mir, dass die Kenntnis dieser Physik absolut unumgänglich ist. Trotzdem ist letzten Endes die richtige Gewichtung der Kapitel nur teilweise geglückt, denn ursprünglich sollten alle in der Arbeit behandelten Effekte durch ein begleitendes MATLAB-Skript demonstriert werden. Der im Anhang eingefügte MATLAB-Code umfasst lediglich das Grundmodell, also Abschnitt 2 und Abschnitt 3. Dann würde sich auch zeigen, wie gute Klangresultate mit dem Wissen dieser Arbeit erzeugt werden können, z.B. mit einem möglichst vollständigen Klaviermodell. Ohne diesem Ergebnis fehlt leider die Kernaussage über diese Methode, nämlich deren Klangqualität. Jedoch sind andere Beispiele in der Literatur (siehe z.B. [14] oder [13]) erfolgreiche Anwendungen dieses Konzepts, die vermischt mit anderen Methoden Ergebnisse höchster Klangqualität erzeugen. Dieser Punkt wäre also noch offen. Weiters wäre es interessant, das Skript auf eine Form zu erweitern, in der DWG-Netzwerke auf intuitive Art und Weise mit Blöcken ähnlich SIMULINK gebaut werden können, siehe Abb. 21.

Anhang A: Codebeispiel

Der folgende Code wurde für die Software MATLAB entwickelt, und stellt das Grundmodell eines DWG dar, wie es in Abschnitt 3 beschrieben wurde. Der Verständlichkeit wurde gegenüber Effizienz Vorrang gegeben: Beispielsweise wird für die beiden Wanderwellen jeweils eine eigene Delayline verwendet (anstatt sich eine zu teilen), um diese ggf. getrennt beobachten zu können. Um die Simulation zeitlich zu begrenzen, ist der Waveguide frequenzunabhängig verlustbehaftet. Die Verluste wurden auf die Orte der Stege konzentriert, und können, falls notwendig, getrennt eingestellt werden. Im Beispiel wurden „closed end boundary conditions“ realisiert, da die Faktoren < 0 sind. Als Parameter für den DWG dienen die physikalischen Parameter Länge (in m) sowie Ausbreitungsgeschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$). Die hier gewählten Anfangswerte $y(0, x) = 0$ bzw. $\frac{\partial y(0, x)}{\partial x} \neq 0$ entsprechen einer angeschlagenen Saite. Alle Rechenschritte im Code sind in Form von Kommentaren begründet.

```
1 %% Eingabeparameter
2 %Allgemeine Parameter
3   %fs... Samplingfrequenz [Hz]
4   fs = 44100;
5
6   %lenop = length of output [s]
7   lenop = 3;
8
9   %Hilfsparamter: wenn TRUE: es werden Diagramme erstellt, sonst
   nicht
10  %prdia = print diagrams
11  prdia = 1;
12
13  %Zur Analyse: Verhalten der Saite über der Zeit aufzeichnen
14  %lenstran = string analysis length [samples]
15  lenstran = 100;
16
17 %Parameter des DWG
18   %lenwgm = length of waveguide in meters
19   lenwgm = 1;
20
21   %c... Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen im Waveguide [m/s]
22   c = 1000;
23
24   %Verstärkungsfaktor der Reflektion am "rechten" Ende des
   Waveguides
25   %rgr = Reflection Gain right
26   rgr = -0.999;
```

```

27
28 %Verstärkungsfaktor der Reflektion am "linken" Ende des Waveguides
29 %rgl = Reflection Gain left
30 rgl = -0.999;
31
32 %Position des Abgriffspunktes im DWG, Entfernung vom "linken"
    Ende des Waveguides [m]
33 %pkpm = "Pickup [m]"
34 pkpm = 0.25;
35 %% Umrechnung der Längenangaben in örtliche Samples
36 %Erinnerung: Länge der Saite entspricht der Länge des Waveguides
37 %lenwgs = length of wave guide in samples
38 lenwgs = ceil(fs * lenwgm / c);
39
40 %pkps = "Pickup [samples]"
41 pkps = ceil(fs * pkpm / c);
42
43 %% Berechnung der Länge des Outputsignals in Samples
44 %lenops = length of output in samples
45 lenops = lenop * fs;
46
47 %output... ausgegebenes Signal
48 output = zeros(1,lenops); %Initialisierung des Outputs
49
50 %% Angabe der Anfangszustände
51 %y0... Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt t = 0 [m]
52 %hier nur Angabe des Trägers nötig: wird automatisch mit Nullen
    auf die Länge des Waveguides ergänzt
53 y0 = [zeros(1,7), hamming(9)'];
54 %Ergänzung des Trägers von y0 mit Nullen auf die Länge des
    Waveguides:
55 y0 = [y0, zeros(1,lenwgs-length(y0))];
56
57 %s0... Geschwindigkeit der Saite zum Zeitpunkt t = 0 [m/s]
58 %hier nur Angabe des Trägers nötig: wird automatisch mit Nullen
    auf die Länge des Waveguides ergänzt
59 s0 = 0;
60 %Ergänzung des Trägers von s0 mit Nullen auf die Länge des
    Waveguides:
61 s0 = [s0, zeros(1,lenwgs-length(s0))];
62
63 %% Berechnung der Wanderwellen yr und yl aus den gegebenen
    Anfangszuständen (laut d'Alembert'schen Lsg)

```

```

64 %Integration von s0
65 %s0i = s0 integrated
66 s0i = zeros(1,lenwgs + 1); %Eine zusätzliche Null VORNE
    angehängt, um Zugriff der DGL auf negative Indizes zu vermeiden
67
68 %Schleife für Integration
69 for i = 1:lenwgs
70     s0i(i+1) = s0(i) + s0i(i);
71 end
72
73 %Entfernen der bei s0i zusätzlich vorne angehängten Null
74 s0i = s0i (2:end);
75
76 %Berechnung von yl
77 %yl = nach links laufende Wanderwelle
78 yl = 0.5 * (y0 + (1/c) * s0i);
79
80 %Berechnung von yr
81 %yr = nach rechts laufende Wanderwelle
82 yr = 0.5 * (y0 - (1/c) * s0i);
83
84 %Initialisierung der Delay-Lines für die beiden Wanderwellen: für
    beide Wanderwellen wird JEWEILS eine Delay-Line verwendet.
    Dadurch können die Teilwellen auch separat im Ergebnis
    betrachtet werden, was für Analyse/Debugging nützlich ist.
85
86 %yll... yl wenn gerade nach links laufend
87 yll = yl; %da yl anfangs nach links läuft
88
89 %ylr... yl wenn gerade nach rechts laufend
90 ylr = zeros(1,lenwgs);
91
92 %yrl... yr wenn gerade nach links laufend
93 yrl = zeros(1,lenwgs);
94
95 %yrr... yr wenn gerade nach rechts laufend
96 yrr = yr; %da yr anfangs nach rechts läuft
97
98 %% Initialisierung der Aufzeichnung der Welle bzw. Wanderwellen für
    Analysezwecke
99 %stran = string analysis
100 stran = zeros(lenwgs,lenstran);
101

```

```

102 %ylan = yl analysis
103 ylan = zeros(lenwgs,lenstran);
104
105 %yran = yr analysis
106 yran = zeros(lenwgs,lenstran);
107
108 %% Saite schwingt
109 for n = 1:lenops
110     %Summation der einzelnen Delay-Lines zur Bestimmung beider
        Wanderwellen bzw. der gesamten Welle
111     %Vollständige Wanderwelle yl
112     yl = yll + ylr;
113
114     %Vollständige Wanderwelle yr
115     yr = yrl + yrr;
116
117     %Berechnung der momentanen Auslenkung der Saite = gesamte Welle
        zum jetzigen Zeitpunkt
118     %str = string
119     str = yr + yl;
120
121 %Abzweigungen für Ausgaben
122     %Abgriffspunkt für Audio: an der Position des "Pickups"
123     output(n) = str(pkps);
124
125     %Bedingung für Aufzeichnung der momentanen Form der Welle bzw.
        Wanderwelle
126     if n <= lenstran
127         stran(1:lenwgs,n) = str;
128         ylan(1:lenwgs,n) = yl;
129         yran(1:lenwgs,n) = yr;
130     end
131
132 %Weiterschieben der Wanderwellen
133     %Reflektion von yl an "linkem" Ende des Waveguides
134     %rsyll = reflected sample yl left
135     rsyll = yll(1) * rgl;
136
137     %Reflektion von yl am "rechtem" Ende des Waveguides
138     %rsylr = reflected sample yl right
139     rsylr = ylr(lenwgs) * rgr;
140
141     %Reflektion von yr am "linken" Ende des Waveguides

```

```

142     %rsyrl = reflected sample yr left
143     rsyrl = yrl(1) * rgl;
144
145     %Reflektion von yr am "rechtem" Ende des Waveguides
146     %rsyrr = reflected sample yr right
147     rsyrr = yrr(lenwgs) * rgr;
148
149     %Weiterschieben aller Samples
150     %Waveguide für yl
151     yll = [yll(2:lenwgs) rsyrl];
152     ylr = [rsyll ylr(1:(lenwgs - 1))];
153
154     %Waveguide für yr
155     yrl = [yrl(2:lenwgs) rsyrr];
156     yrr = [rsyrl yrr(1:(lenwgs - 1))];
157 end
158
159 %% Ausgaben
160 sound(output, fs);
161 mp3write(output, fs, 16, 'DWG.mp3', '--quiet -h -b 160');
162
163 if true(prdia) == 1; %Plotten von Diagrammen ein/aus
164     %ANALYSEN DES OUTPUTS
165     fig = figure; %fig = "figure"; Ermöglicht Zugriff auf
166         properties von figures
167     %Anpassen der Fenstergröße der Figure: soll in der Vertikalen
168         halb so hoch sein als die Standardgröße
169     sz = get(fig, 'Position'); %sz = "size"... Größe der figure
170     set(fig, 'Position', [sz(1) sz(2) sz(3) sz(4)/2]);
171     spect_mod(fft(output), fs, 'a');
172
173     %Ermittlung des Peak-Wertes des Outputs in dB (in Bezug auf
174         Wert 1):
175     peak = 20 * log10(max(abs(output)));
176     fprintf('Peak =%6.2f dB \n', peak);
177
178     %PLOTS DER ANFANGSWERTE
179     fig = figure; %Erklärung: siehe oben
180     sz = get(fig, 'Position');
181     set(fig, 'Position', [sz(1) sz(2) sz(3)*0.6 sz(4)*0.5]);
182     stem(y0);
183     title('Auslenkung zum Zeitpunkt t = 0');
184     xlabel('Ort auf Saite [Samples]');

```

```

182         ylabel('Auslenkung [m]');
183
184     fig = figure; %Erklärung: siehe oben
185         sz = get(fig, 'Position');
186         set(fig, 'Position', [sz(1) sz(2) sz(3)*0.6 sz(4)*0.5]);
187         stem(s0);
188         title('Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0');
189         xlabel('Ort auf Saite [Samples]');
190         ylabel('Geschwindigkeit [m/s]');
191
192 %PLOTS DER WELLEN
193     figure;
194         surf(y1an);
195         title('Wanderwelle y1 über der Zeit');
196         xlabel('Zeit [Samples]');
197         ylabel('Ort auf Saite [Samples]');
198         zlabel('Amplitude der Wanderwelle [m]');
199         view([-50 70]);
200         shading interp;
201         %Zeichnen einer Linie durch den Surface-Plot an dem Ort des
202         "Pickups", um den aufgezeichneten Anteil hervorzuheben:
203         hold on;
204         %die folgenden 3 Koordinaten der Kurve im 3D müssen alle die
205         gleiche Dimension haben (1 x <lenstran>), damit MATLAB
206         <lenstran> Punkte im 3D zeichnen kann:
207         t = 1:lenstran;
208         outputan = y1an(pkps,t); %outputan = "output analysis"
209         pkpsan = repmat(pkps,1,lenstran); %pkpsan = "Pickup
210         analysis"
211         p3 = plot3(t,pkpsan,outputan);
212         legend(p3, 'Position des Abgriffspunkts', 'Position', [280
213         234 100 100]); %Anpassung der Position der Legende,
214         damit einerseits die Grafik nicht zu groß wird,
215         andererseits die Legende das Diagramm nicht verdeckt.
216
217     figure;
218         surf(yran);
219         title('Wanderwelle yr über der Zeit');
220         xlabel('Zeit [Samples]');
221         ylabel('Ort auf Saite [Samples]');
222         zlabel('Amplitude der Wanderwelle [m]');
223         view([-50 70]);
224         shading interp;

```

```

218     %Erklärung: siehe oben
219     hold on;
220     outputan = yran(pkps,t);
221     p3 = plot3(t,pkpsan,outputan);
222     legend(p3, 'Position des Abgriffspunkts','Position',[280
223         234 100 100]);
224
225 figure;
226     surf(stran);
227     title('Schwingende Saite über der Zeit');
228     xlabel('Zeit [Samples]');
229     ylabel('Ort auf Saite [Samples]');
230     zlabel('Amplitude der Schwingung [m]');
231     view([-50 70]);
232     shading interp;
233     %Erklärung: siehe oben
234     hold on;
235     outputan = stran(pkps,t);
236     p3 = plot3(t,pkpsan,outputan);
237     legend(p3, 'Position des Abgriffspunkts','Position',[280
238         234 100 100]);
239 end

```

Die zu diesen Parametern generierten Grafiken sowie die Audiodatei sind im Anhang B unter „Codebeispiel“ verfügbar.

Anhang B: Klangbeispiele

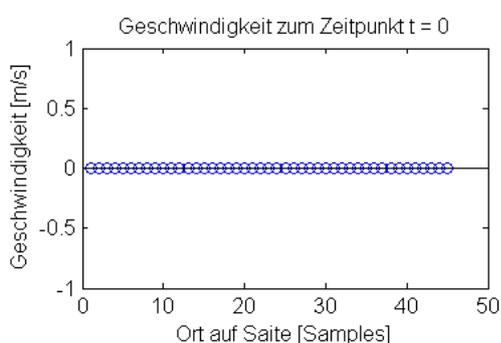
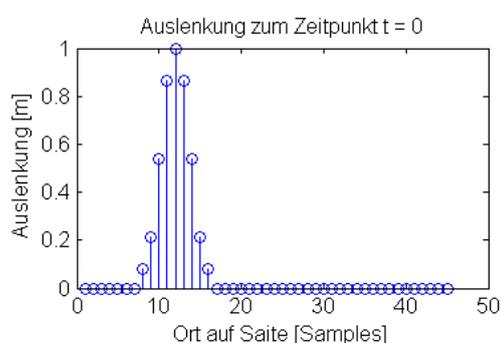
Die nachfolgenden Klangbeispiele wurden mit dem MATLAB-Skript im Anhang A generiert. Die jeweilige Wahl für alle *variieren* Parameter sowie Anfangswerte sind neben dem Beispiel aufgeführt. Nicht explizit genannte Parameter entsprechen Klangbeispiel „Codebeispiel“. Alle unter der Überschrift `%Allgemeine Parameter` aufgeführten Werte bleiben immer gleich und entsprechen Anhang A. Das Spektrum jedes Klages verdeutlicht die Zusammenhänge zwischen Anregung und Klangresultat. Bei einigen Beispielen wurde außerdem ein 3D-Diagramm hinzugefügt, welches den schwingenden Waveguide darstellt, und somit sehr hilfreich für das Verständnis des gesamten Prozesses ist.

Codebeispiel

Parameter

```
lenwgm = 0.75  
c = 1000  
rgr = -0.999  
rgl = -0.999  
pkpm = 0.55
```

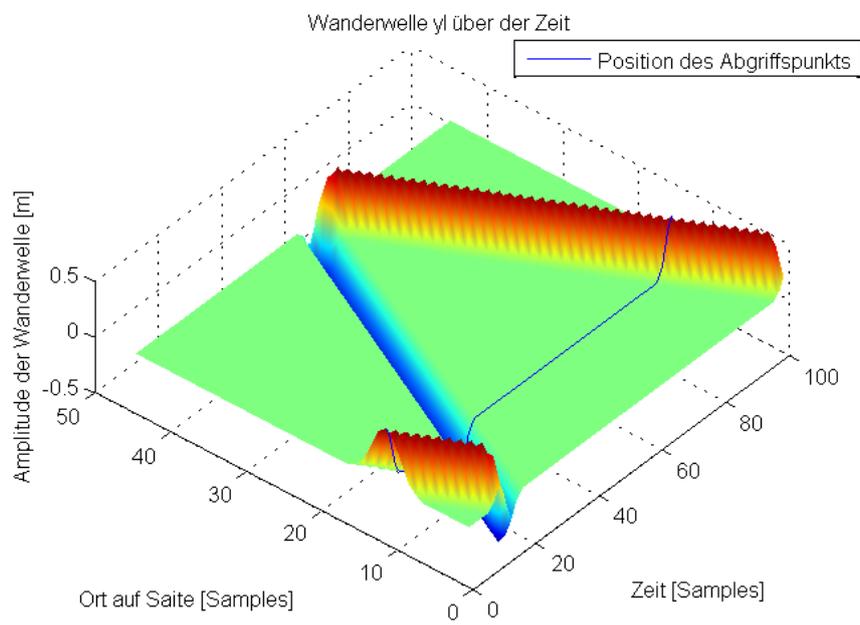
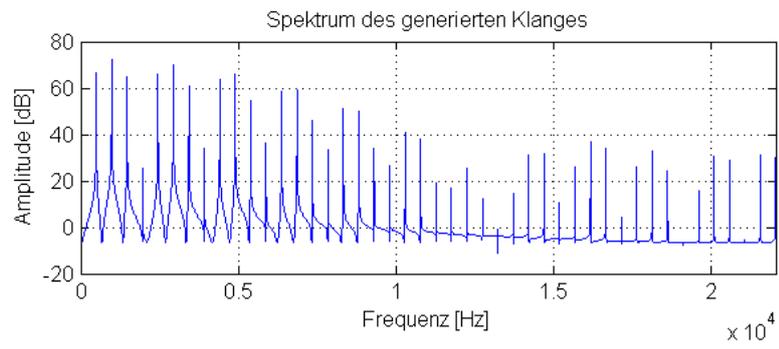
Anfangswerte

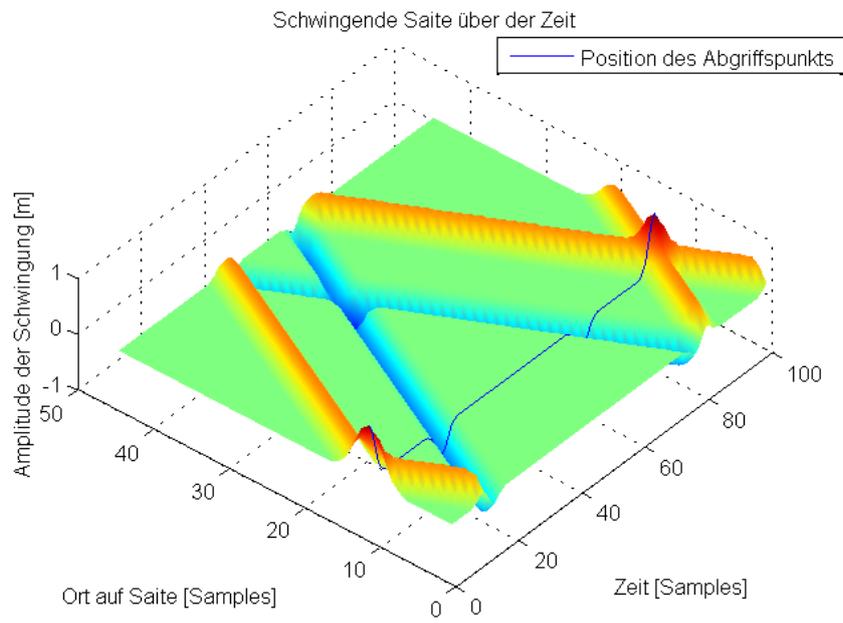
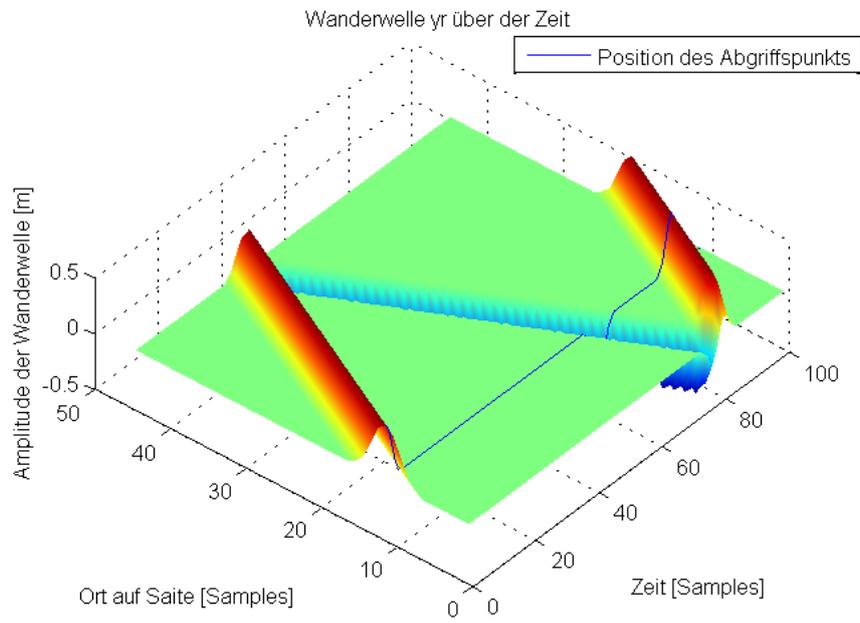


Ergebnisse

Codebeispiel

Peak = 0.00 dB





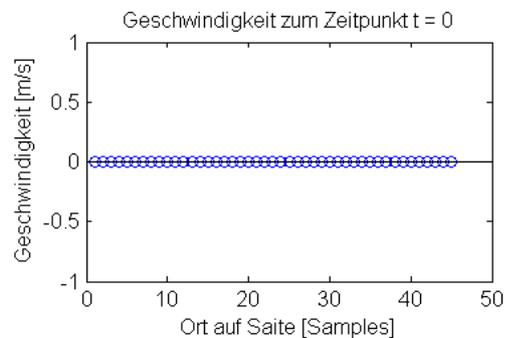
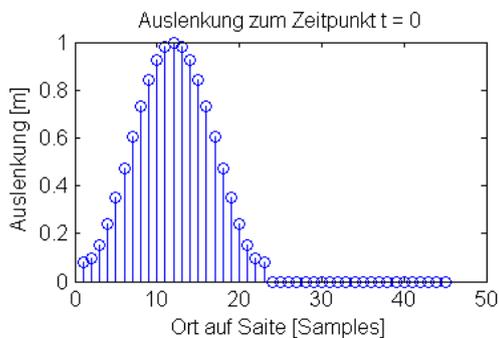
Art des Anfangswertes

Diese Beispiele dienen zur Demonstration, wie sich die *Form* eines Anfangswertes auf das Klangresultat auswirkt. Miteinander verglichen werden Hamming-Fensterfunktionen unterschiedlicher Breite, welche sowohl als Anfangsauslenkung als auch als Anfangsgeschwindigkeit auftreten.

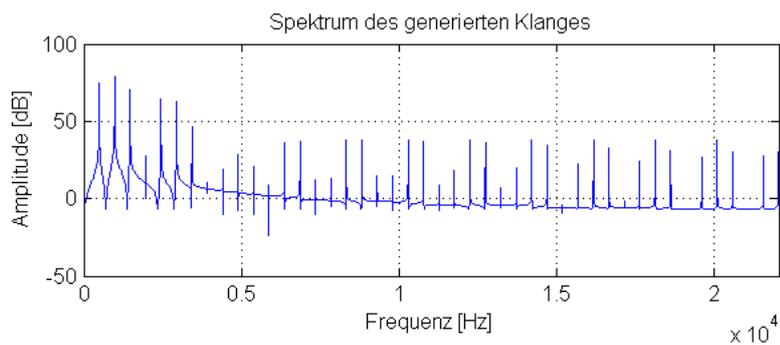
gezupft - schmal

siehe Klangbeispiel „Codebeispiel“

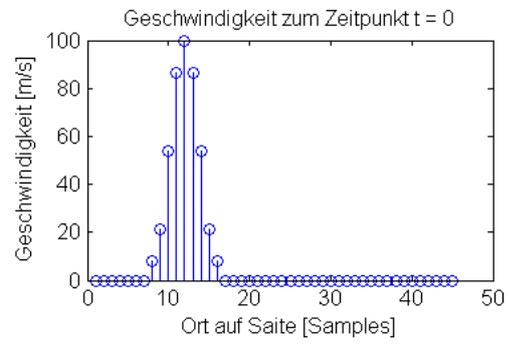
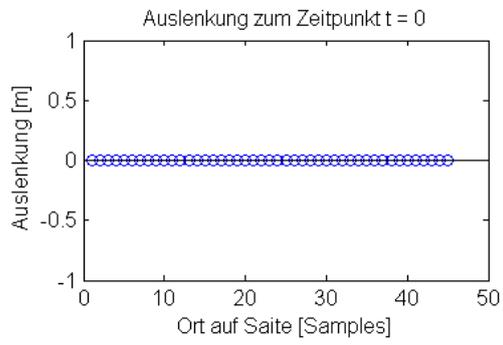
gezupft - breit



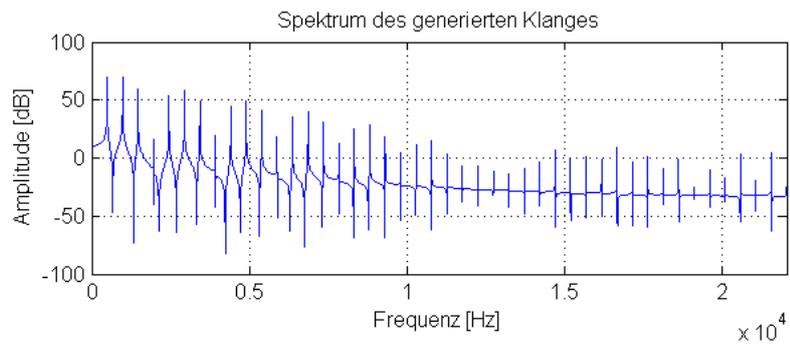
gezupft - breit

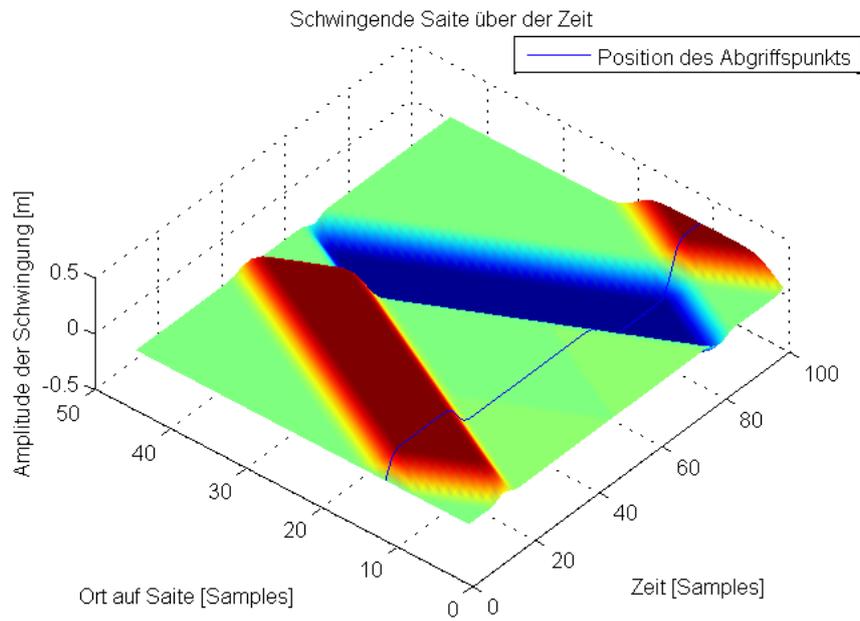


angeschlagen - schmal

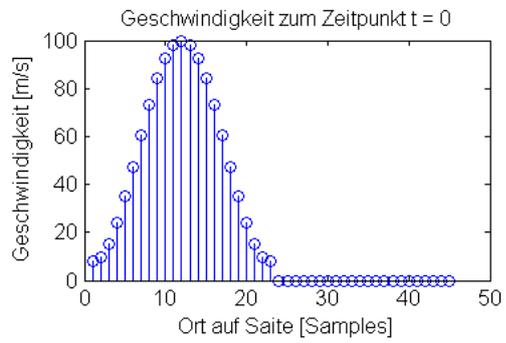
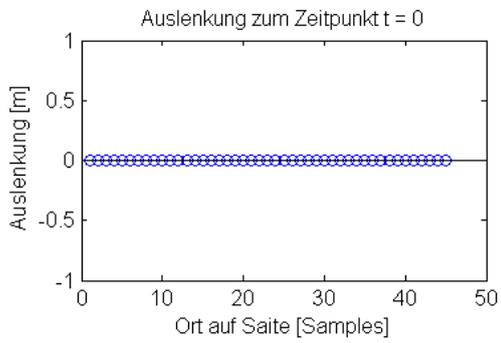


angeschlagen - schmal

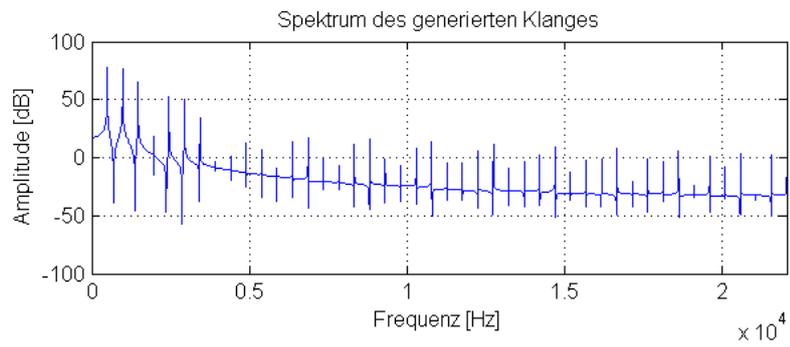




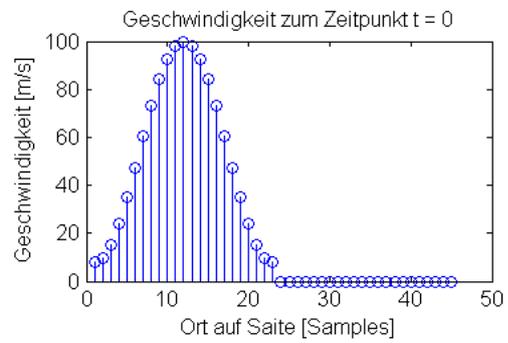
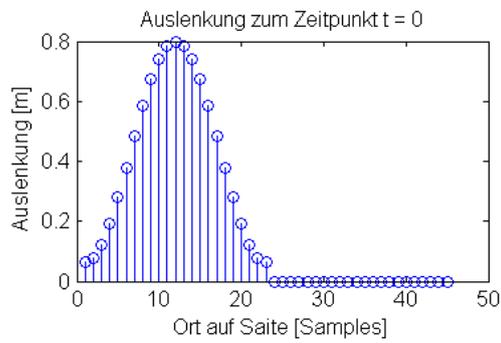
angeschlagen - breit



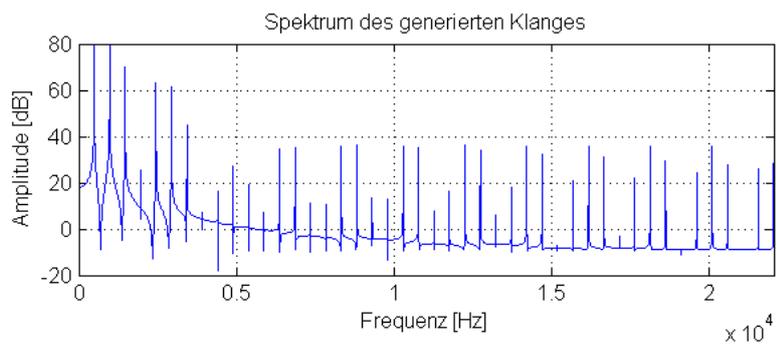
angeschlagen - breit

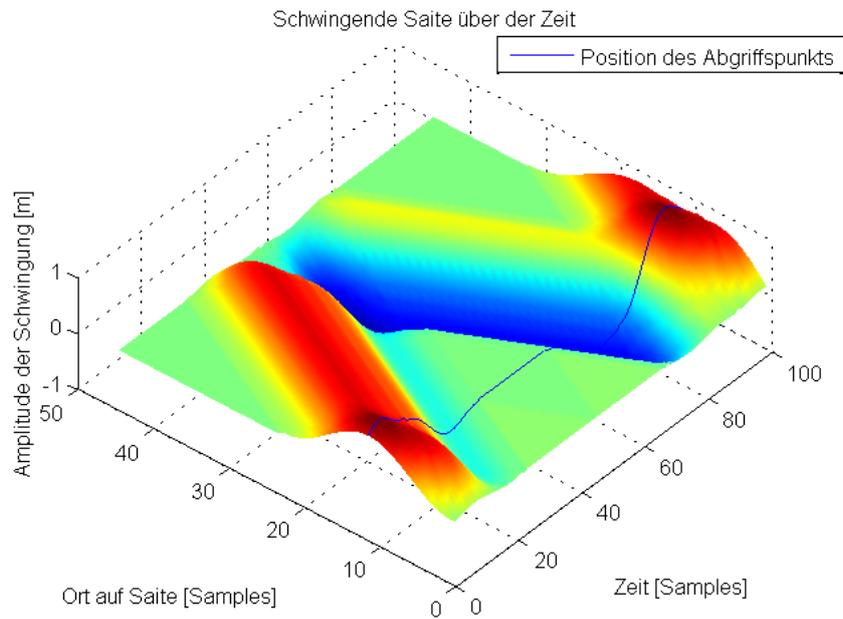


gezupft und angeschlagen



gezupft und angeschlagen

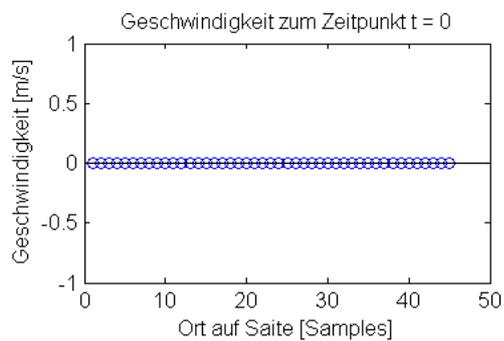
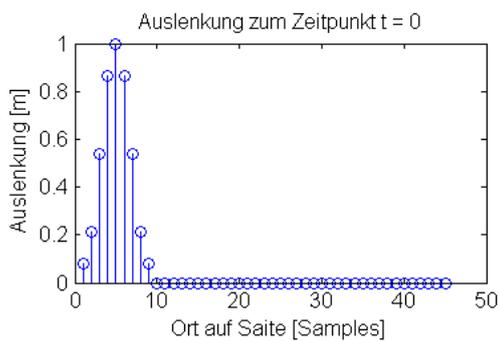




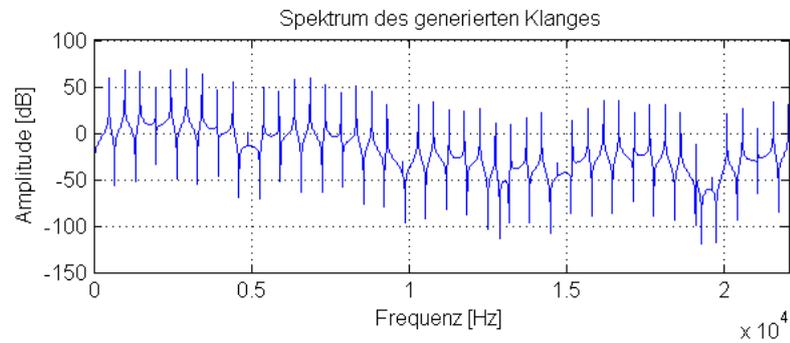
Position des Anfangswerts

In dieser Reihe von Beispielen wird die Position des Anfangswertes variiert. Der Anfangswert befindet sich zunächst 10 cm, dann 25 cm, und zum Schluss 40 cm vom Steg entfernt. Ein Anfangswert in der rechten Hälfte verursacht den gleichen Klang wie einer über die Mitte nach links gespiegelter, da lediglich die Phase des Outputs invertiert wird. Aus diesem Grund wird hier die rechte Hälfte nicht einbezogen.

Anfangswert - 10 cm Entfernung



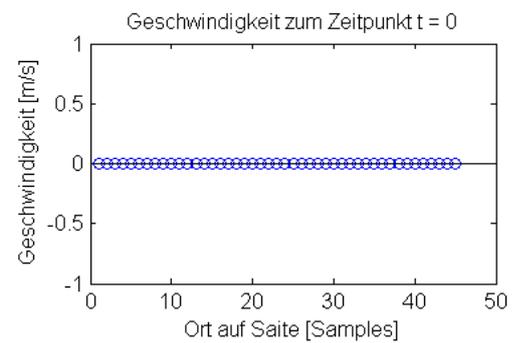
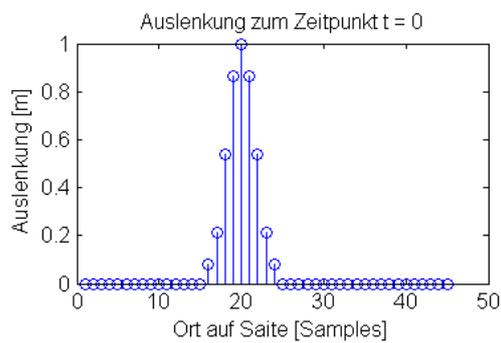
Anfangswert - 10 cm Entfernung



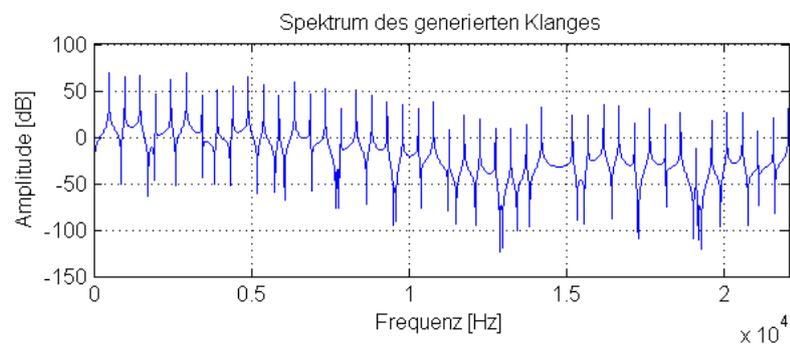
Anfangswert - 25 cm Entfernung

siehe Klangbeispiel „Codebeispiel“

Anfangswert - 40 cm Entfernung



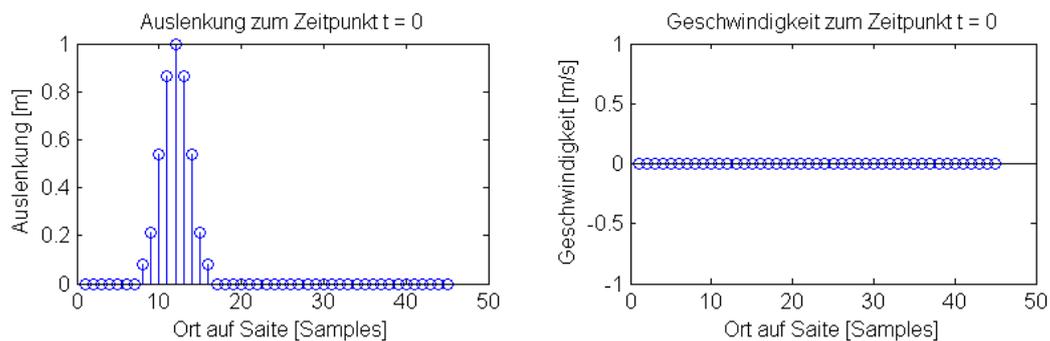
Anfangswert - 40 cm Entfernung



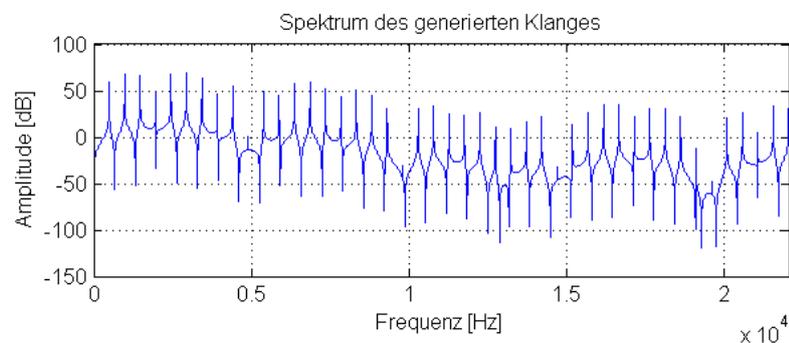
Position des Abgriffspunkts

Im Folgenden wird die Position des Abgriffspunkts schrittweise nach innen verschoben. Die Abstände sind die Gleichen wie bei der Verschiebung des Anfangswertes, um diese beiden Parameter bestmöglich vergleichen zu können. Für über die Mitte gespiegelte Abgriffpositionen gilt Gleiches wie für Anfangswerte.

Abgriffspunkt - 10 cm Entfernung



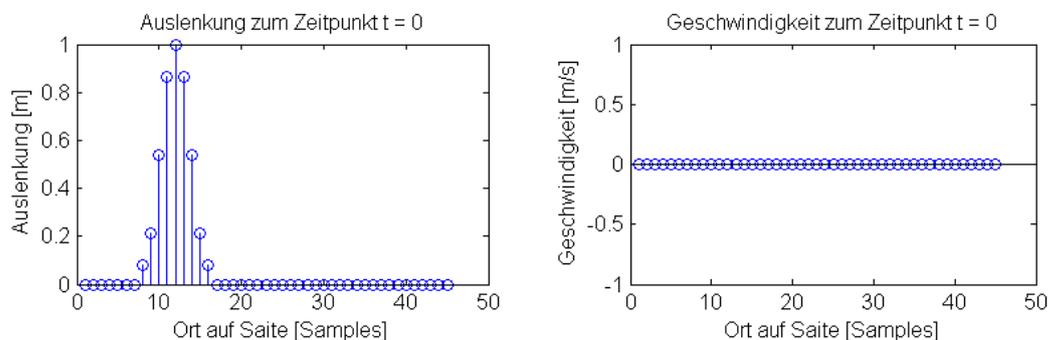
Abgriffspunkt - 10 cm Entfernung



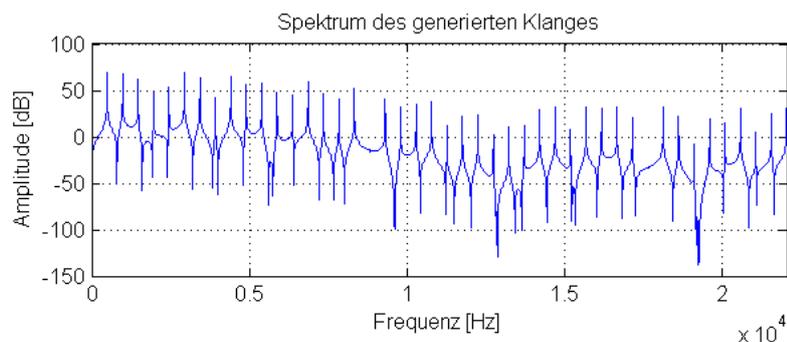
Abgriffspunkt - 25 cm Entfernung

siehe Klangbeispiel „Codebeispiel“

Abgriffspunkt - 40 cm Entfernung

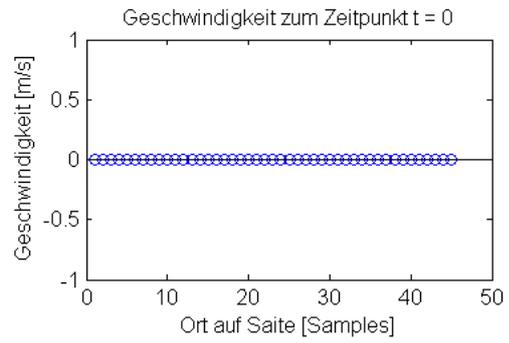
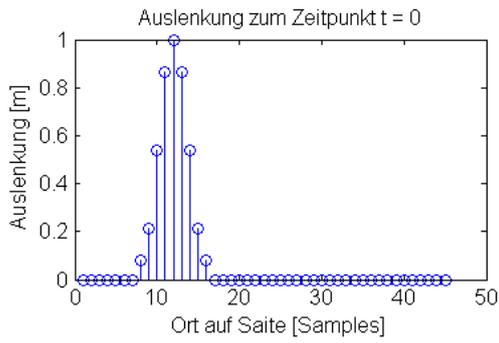


Abgriffspunkt - Entfernung 40 cm

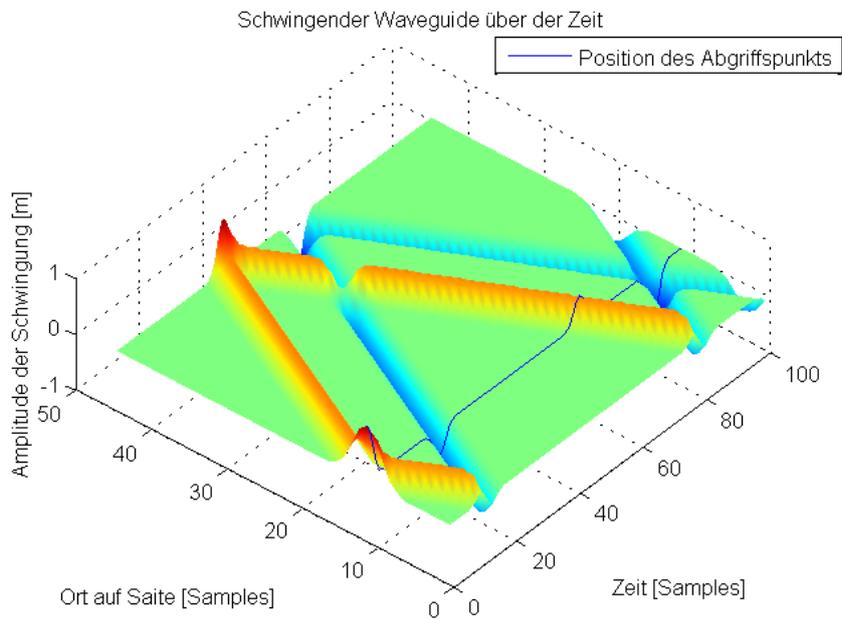
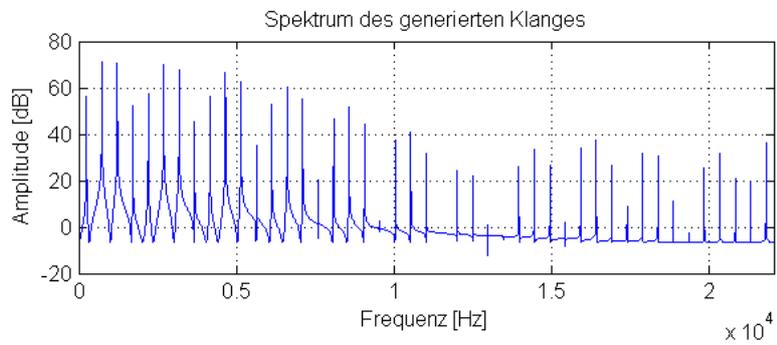


Open End Boundary Condition

Dieses Beispiel ist eine Simulation einer „open end boundary condition“ (vgl. Abschnitt 3.3). Dies wird erreicht, indem bei einem der Reflexionsfaktoren, z.B. bei $r_{gr} = -0.999$ das negative Vorzeichen entfernt wird. Dieser Fall tritt bei einigen Blasinstrumenten ein, wo sie als „gedeckte Pfeife“ bezeichnet werden. Bei Analyse der Schwingungsmoden analog zu Abschnitt 2.6 stellt sich heraus, dass die Grundschwingung im Vergleich zur vorhin betrachteten „offenen Pfeife“ bzw. „closed end boundary condition“ eine Oktave tiefer klingt. Weiters sind im Spektrum ausschließlich ungerade Teiltöne vorhanden. Außer dem oben erwähnten $r_{gr} = 0.999$ sind alle Parameter gleich zum Klangbeispiel „Codebeispiel“, um Vergleichbarkeit zu gewähren.



open end boundary condition



Literatur

- [1] Fourier Analysis of a triangle wave. <http://www.leancrew.com/all-this/2015/01/the-michelson-fourier-analyzer/>. accessed 7/17/2016.
- [2] Harmonic partials on strings. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harmonic_partials_on_strings.svg. accessed 7/17/2016.
- [3] Standing waves. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standingwaves.svg>. accessed 7/17/2016.
- [4] Anders Askenfelt, editor. *Five lectures on the acoustics of the piano*. Royal Swedish Academy of Music, 1990.
- [5] Antoine Chaigne; Anders Askenfelt. Numerical simulations of piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1994.
- [6] Stefan Bilbao. *Numerical Sound Synthesis*. Wiley, 2009.
- [7] Werner Weselak; Gerhard Graber. *Raumakustik*, 2009.
- [8] Robert Höldrich. *Musikalische Akustik Skriptum*. ÖH Skriptenreferat.
- [9] Alan Hood. D'Alembert's solution of the Wave Equation. <http://www-solar.mcs.st-and.ac.uk/~alan/MT2003/PDE/node12.html>, 2000. accessed 7/25/2016.
- [10] Otto Koudelka. *Nachrichtentechnik Skriptum*, 2008.
- [11] Walter H. G. Lewin. MIT 8.03 Physics III: Vibrations and Waves - Fall 2004. http://videlectures.net/mit803f04_physics_vibrations/, 2004. Recorded by: Massachusetts Institute of Technology, MIT.
- [12] Philip M. Morse. *Vibration and Sound*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948.
- [13] Steven Sanders and Ron Weiss. Synthesizing a Guitar Using Physical Modeling Techniques. <http://www.ee.columbia.edu/~ronw/dsp/>. accessed 9/9/2016.
- [14] Julius Smith and Scott A Van Duyne. Commuted Piano Synthesis. *ICMC*, (pp. 319-326), 1995.
- [15] Julius O. Smith. Physical Modeling using Digital Waveguides. 16(4), 1992.
- [16] Julius O. Smith. *Physical Audio Signal Processing*. <http://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/>, 2010. online book, accessed 7/17/2016.

- [17] Gabriel Weinreich. The coupled motion of piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 62:pp. 1474–1484, December 1977.
- [18] Klaus Winkler, editor. *Die Physik der Musikinstrumente*. Spektrum Akademischer Verlag, 1998.